О мощностях множеств предполных классов в предельных логиках

J. Demetrovics

В настоящей работе изучается вопрос о числе предполных классов в различных предельных логиках [1].

Из определения предельной логики сразу следует, что любая предельная логика содержит не более чем континуум предполных классов. Показано, что для любого кардинального числа α, равного любому натуральному числу $\varkappa_0$ или $\mathfrak{c}$, существует предельная логика, мощность множества всех различных предполных классов которой равна α. Большинство понятий, используемых нами, взято из работы [1].

Автор выражает благодарность С. В. Яблонскому, под чьим руководством выполнена работа.

1°. $P^*_{\varkappa_0}$ обозначает множество всех функций, переменные в которых определены на множестве $E_{\varkappa_0}=\{0, 1, 2, \dots\}$, и сами функции принимают значения из того же множества.

Определение. Множество функций $\mathfrak{D}=\{f(x_1, \dots, x_n)\}$ гомоморфно отображается в множество функций $\mathfrak{A}=\{g(y_1, \dots, y_n)\}$, если

1. существует взаимно однозначное соответствие между переменными: $x_i \leftrightarrow y_i$,

2. каждой функции f из $\mathfrak{D}$ однозначно отвечает функция g из $\mathfrak{A}$, зависящая от соответствующих переменных,

3. всякой суперпозиции функций из $\mathfrak{D}$, принадлежащей $\mathfrak{D}$, отвечает аналогичная суперпозиция из соответствующих функций системы $\mathfrak{A}$, которая также принадлежит $\mathfrak{A}$.

Если при этом отображении гомоморфизм имеет место в обе стороны, то говорят, что системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ изоморфны.

Определение. Замкнутый класс $P_{\varkappa_0} \subset P^*_{\varkappa_0}$ называется предельной логикой, если

1. $P_{\varkappa_0}$ состоит из счётного числа функций,

2. $P_{\varkappa_0}$ содержит гомоморфные прообразы k-значных логик P_k, $(k \geqq 2)$, т. е. для всякого натурального числа k, существует множество A_k из $P_{\varkappa_0}$ которое гомоморфно отображается на множество всех функций k-значной логики.

Обычным образом [2] определяются понятия суперпозиции функций из $P_{\varkappa_0}$ и замыкания $[\mathfrak{M}]$ множества функций

$$\mathfrak{M} \subseteqq P_{\varkappa_0}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — подмножество множества $\mathfrak{N}$, где

$$\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N} \subseteqq P_{\varkappa_0}.$$

Определение. Подмножество $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{N}$ называется полной системой в $\mathfrak{N}$, если $[\mathfrak{M}] \supseteqq \mathfrak{N}$.

Определение. Класс функций $\mathfrak{M}$, принадлежащий замкнутому классу $\mathfrak{N}$ из $P_{\varkappa_0}$ называется предполным классом в $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}$ представляет неполную в $\mathfrak{N}$ систему, но присоединение любой функции $f \in \mathfrak{N}$ и $f \bar{\in} \mathfrak{M}$ обращает $\mathfrak{M}$ полную в $\mathfrak{N}$ систему.

2°. Поясним коротко общую идею конструкций, проводимых ниже. Для каждой мощности мы будем подбирать некоторые замкнутые классы функций k-значных логик, обладающие специальными свойствами. Счётные семейства таких классов мы будем «вкладывать» в предельные логики таким образом, чтобы нужные нам свойства переносились на эти логики. В частности, в лемме 1 удалось использовать классы построенные в [3].

Лемма 1. Существует предельная логика P, в которой нет предполных классов.

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение множества $E_{\varkappa_0}$:

$$E_{\varkappa_0} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_1 = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{и}$$

$$\varepsilon_{j+1} = \left\{\frac{j(j+1)}{2}+3, \frac{j(j+1)}{2}+4, \ldots, \frac{j(j+1)}{2}+j+3\right\} \qquad j=1, 2, 3, \ldots .$$

Определим функцию $\varphi_k^n(x_1, \ldots, x_n)$, где $k=2, 3, \ldots; n=1, 2, \ldots$, областью определения которой является множество $\underbrace{\varepsilon_k \times \varepsilon_k \times \varepsilon_k \times \cdots \times \varepsilon_k}_{n \text{ раз}}$, а областью значений—множество ε_k

$$\varphi_k^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \max(x_1, \ldots, x_n)+1, & \text{если ни одна из переменных не равна } x_i \neq \dfrac{(k-1)k}{2}+k+2; \\ \dfrac{(k-1)k}{2}+3, & \text{если хотя бы одни } x_i \; x_i = \dfrac{(k-1)k}{2}+k+2. \end{cases}$$[1]

---

[1] Нетрудно видеть, что $\varphi_k^n(x_1, \ldots, x_n)$ есть так называемая функция Вебба в k-значной логике.

Используя функции $\varphi_k^n(x_1, \ldots, x_n)$, определим функцию $f_k^n(x_1, \ldots, x_n) \in P_{\varkappa_0}$

$$f_k^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \varphi_k^n(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n) \in \varepsilon_k \times \cdots \times \varepsilon_k; \\ 1, & \text{если } x_1 = x_2 = \cdots = x_i = \cdots = x_n = 3; \\ 0, & \text{при всех других значениях } x_1, x_2, \ldots, x_n. \end{cases}$$

Для примера приведем таблицы функций $f_2^2(x_1, x_2)$ и $f_3^2(x_1, x_2)$:

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0			
2	0	0	0	0			0
3	0	0	0	1			
4					5	4	
5					4	4	
6		0					0

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0						
1	0	0	0	0						
2	0	0	0	0						
3	0	0	0	1					0	
4					0	0				
5					0	0				
6							7	8	6	
7				0			8	8	6	
8							6	6	6	
9										0

Через P обозначим замыкание множества $\{f_k^n(x_1, \ldots, x_n)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Множество функций P разбиваем на бесконечное число непересекающихся классов $P = \bigcup_{k=2}^{\infty} P_k$, где $P_k = \{f_k^1, f_k^2, \ldots, f_k^m, \ldots\}$. Обозначим через P_k^n, $n \geqq 1$, множество функций $P_k^n = \{f_k^1, f_k^2, \ldots, f_k^n\}$.

Покажем, что P предельная логика. В самом деле, функция $\varphi_k^n(x_1, \ldots, x_n)$ образует базис в P_{ε_k}.[2] Нетрудно видеть, что отображение $f_k^n \to \varphi_k^n$ нужный нам гомоморфизм.

Замечания

а) суперпозиция $f_k^n(x_1, \ldots, x_n) \in P_n^k$ даёт нам лю буюфункцию $f_k^m(x_1, \ldots, x_m) \in P_k^m$, где $m \leqq n$;

б) суперпозиция $f_k^n(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^n$ не даёт нам функции $f_k^{n+l}(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+l})$, где $l \geqq 1$;

в) суперпозиция $f_k^n(x_1, \ldots, x_n) \in P_n^k$ не даёт нам никакую функцию $f_{k+l}^h(x_1, \ldots, x_h) \in$ $\in P_{k+l}$;

г) не существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P$ такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k_1}$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k_2}$, где $k_1 \neq k_2$.

[2] Через P_{ε_k} здесь и в дальнейшем мы будем обозначать множество всех функций k-значной логики определенное на наборах из ε_k и принимающие значения в ε_k.

Очевидно, что классы P, P_k, P_k^n являются замкнутыми классами, причем $P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^n$. Покажем, что для любого k в P_k нет предполных классов.

Пусть в замкнутом классе P_k есть некоторый предполный класс $\tilde{P}_k$, т. е. такой, что $P_k \neq [\tilde{P}_k]$ и $P_k = [\tilde{P}_k \cup \tilde{f}]$. Рассмотрим следующие случаи

а) $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \bar{\in} \tilde{P}_k$, $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$,

б) $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \bar{\in} \tilde{P}_k$, $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k_1}$, где $k \neq k_1$.

а) Тогда из нашего замечания следует, что для любого $l, l \geqq 1$, функции $f_k^{n+l}(x_1, \ldots, x_n, \ldots x_{n+l})$ также не входят в класс $\tilde{P}_k$. Но по предположению о предполноте $\tilde{P}_k$, для любого l $f_k^{n+l} \subset [\tilde{P} \cup \tilde{f}]$. Нетрудно видеть, что тогда $\tilde{P}_k$ должен содержать некоторую функцию η от $n+l$ переменных, и $\eta \neq f_k^{n+l}$. Ясно, однако, что любая такая функция обладает следующим свойством: на ε_1 $\eta \equiv 0$. Но f_k^{n+l} не может быть получена суперпозицией с участием такой функции. Это противоречит предположению.

б) Очевидно.

Сейчас покажем, что в предельной логике $P, P = \bigcup_{k=2}^{\infty} P_k$, нет ни одного предполного класса. Пусть в P есть некоторый предполный класс $\tilde{P}$. Тогда существует P_k' такая, что $P_k' \subset P_k \subset P$ и $[P_k'] \neq [P_k]$. Но из замечания и из предыдущего рассуждения вытекает, что даже P_k не получим, т. е. $[\tilde{f} \cup \tilde{P}] \not\supset P_k$.

Итак наша лемма доказана.

Лемма 2. Для любого натурального числа k существует замкнутый класс T_k, в котором имеется точно k предполных классов.

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение множества $E_{\varkappa_0}$:

$$E_{\varkappa_0} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j, \quad \text{где} \quad \varepsilon_0 = \{0, 1, 2, \ldots, 7\},$$

$$\varepsilon_i = \{4(i+1), 4(i+1)+1, 4(i+1)+2, 4(i+1)+3\}, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Определим функции $t_j(x) \in P_{\varkappa_0}$, следующим образом

$$t_j(x) = \begin{cases} 4(j+1)+2, & \text{если } x = 4(j+1); \\ 4(j+1), & \text{если } x = 4(j+1)+2; \\ 0, & \text{при всех друг значениях } x. \end{cases}$$

Через T_k обозначим замыкание множества $\{t_1(x), \ldots, t_k(x)\}$. Покажем, что в T_k имеется ровно k предполных классов. В T_k входят только следующие функции

$$t_0^0(x) \equiv 0, \quad t_i(x), \quad t_i^0(x), \quad \text{где}$$

$$t_i^0(x) = \begin{cases} 4(i+1), & \text{если } x = 4(i+1); \\ 4(i+1)+2, & \text{если } x = 4(i+1)+2; \\ 0, & \text{при всех других значениях } x. \end{cases}$$

Рассмотрим замкнутый подкласс $\tilde{T}_i \subset T_k$, $\tilde{T}_i = [t_0^0(x), t_j^0(x), t_l(x)]$ где $j=1, \ldots, k$; $l=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$. Ясно, что для любого i, $\tilde{T}_i$ предполный класс в T_k. Очевидно также, что в T_k нет других предполных классов.

Лемма 3. Для любого натурального числа k существует предельная логика $\mathfrak{A}$, в которой имеется ровно k предполных классов.

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение множества $E_{\varkappa_0}$:

$$E_{\varkappa_0} = M_0 \cup M_1, \quad M_0 = \{0, 1, 3, \ldots, 2r+1, \ldots\}, \quad M_1 = \{2, 4, 6, \ldots, 2r, \ldots\}.$$

На этом множестве определим функции $g_k^n(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом

$$g_k^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 2f_k^n\left(\frac{e_1+1}{2}, \ldots, \frac{e_n+1}{2}\right) \dot{-} 1, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n) \in \\ & \in (M_0 \setminus \{0\}) \times \ldots \times (M_0 \setminus \{0\}); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$; $k=2, 3, 4, \ldots$ и $f_k^n(x_1, \ldots, x_n)$ та функция, которая была определена в лемме 1. Здесь под $x \dot{-} y$ понимается, как обычно, арифметическая разность. Нетрудно видеть, что множество функций $\mathfrak{A}' = [g_k^n(x_1, \ldots, x_n)]$ является предельной логикой без предполных классов. Мы «перенесли» предельную логику $P = [f_k^n(x_1, \ldots, x_n)]$ из леммы 1 с множества $E_{\varkappa_0}$ на множество $M_0 \setminus \{0\}$. Возьмем ещё замкнутый класс T_k, построенный в предыдущей лемме. Очевидно, что множество функций $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}' \cup T_k]$ есть предельная логика, которая удовлетворяет условию леммы.

Лемма 4. Существует предельная логика $\mathfrak{D}$, в которой имеется счётное число предполных классов.

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение $E_{\varkappa_0}$:

$$E_{\varkappa_0} = \bigcup_{j=2}^{\infty} \varepsilon_j, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{j+1} = \left\{\frac{j(j+1)}{2} - 1, \frac{j(j+1)}{2}, \ldots, \frac{j(j+1)}{2} + j - 1\right\}, \quad j=1, 2, \ldots.$$

Пусть $\varphi_k'(x, y)$ — функция Вебба из P_{ε_k} $(k \geqq 2)$.

Определим функцию $\varphi_k(x, y) \in P_{\varkappa_0}$,

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} \varphi_k'(x, y), & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \in \varepsilon_k \times \varepsilon_k; \\ 0, & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \bar{\in} \varepsilon_k \times \varepsilon_k. \end{cases}$$

Через $\mathfrak{D}$ обозначим замыкание множества $\{\varphi_k(x, y)\}$. Очевидно, что множество функций $\mathfrak{D}$ является предельной логикой.

Докажем предварительно следующее утверждение:

Для того, чтобы замкнутый класс $\tilde{\mathfrak{D}}$ был предполным классом в предельной логике $\mathfrak{D}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое m, что $\tilde{\mathfrak{D}}$ в m-ом ящике был предполным в смысле m-значной логики, и при любом $k \neq m$ был бы полным в k-ом ящике в смысле k-значной логики.

Достаточность этого условия очевидна.

Необходимость. Если класс $\tilde{\mathfrak{D}}$ предполный в m-ом ящике, предполный также ещё в каком-то ящике, то из построения ясно, что существует такая функция $g(x_1, ..., x_n) \in \mathfrak{D}$, что $g(x_1, ..., x_n) \bar{\in} \tilde{\mathfrak{D}}$, и $[[g(x_1, ..., x_n)] \cup \tilde{\mathfrak{D}}] \neq \mathfrak{D}$, т. е. $\tilde{\mathfrak{D}}$ не есть предполный в $\mathfrak{D}$ класс. Аналогично доказывается тот случай, когда $\tilde{\mathfrak{D}}$ в m-ом ящике не является ни полным, ни предполным в смысле m-значной логики.

Подсчитаем теперь число предполных классов в предельной логике $\mathfrak{D}$. Известно, что число α_k предполных классов в k-значной логике P_k-конечно. Поэтому из доказанного утверждения сразу вытекает, что число предполных классов в предельной логике $\mathfrak{D}$ не более чем счетно. С другой стороны, ясно, что это число бесконечно. Лемма доказана.

Лемма 5. Существует предельная логика Q, в которой имеется континуум различных предполных классов.

Доказательство. Пусть $E_k = \{0, 1, 2, ..., k-1\}$, $k \geqq 2$.

Возьмем функции $\psi_k(x, y) \in P_{\aleph_0}$ определяемые следующим образом:

$$\psi_k(x,y) = \begin{cases} \max(e_1, e_2) + 1 \pmod k, & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \in E_k \times E_k; \\ 0, & \text{если } (x, y) = (e_1, e_2) \bar{\in} E_k \times E_k. \end{cases}$$

Через Q обозначим замыкание множества $\bigcup\limits_{k=2}^{\infty} [\psi_k(x, y)]$. Легко проверить, что множество Q является предельной логикой.

Покажем, что уже мощность множества всех различных предполных классов монотонной функции в предельной логике Q равна континууму.

Пусть γ — бесконечная последовательность натуральных чисел, такая, что её начальный отрезок длины $2k$ содержит все целые числа от 0 до $2k-1$. Каждой последовательности однозначно можно поставить в соответствие бесконечную последовательность β, состоящую из 0 и 1; k-ый разряд последовательности β равен 1 ($\beta_k = 1$), когда в последовательности γ число $2k-2$ предшествует числу $2k-1$ и в противном случае равен 0.

Каждый начальный отрезок длины $2k$ последовательности γ, соответственно начальный отрезок длины k последовательности β определяет некоторый порядок монотонности в P_{2k}. Например для $k \leqq 2$ следующим образом имеем:

$$\begin{array}{llll} k=1 & \gamma_1^1 = 01 \leftrightarrow \beta_1^1 = 0 & k=2 & \gamma_2^1 = 0123 \leftrightarrow \beta_2^1 = 00 \\ & \gamma_1^2 = 10 \leftrightarrow \beta_1^2 = 1 & & \gamma_2^2 = 0132 \leftrightarrow \beta_2^2 = 01 \\ & & & \gamma_2^3 = 1023 \leftrightarrow \beta_2^3 = 10 \\ & & & \gamma_2^4 = 1032 \leftrightarrow \beta_2^4 = 11 \end{array}$$

Пусть $\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$. Ясно, что предполный класс из P_2, соответствующий порядку β_1 содержится в предполном классе из P_4, соответствующем порядку $\beta_1 \beta_2$.

Если $\beta_k = 0$, то мы можем рассматривать монотонный предполный класс из P_{2k-1}, который соответствует порядку $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2k-2}$ «$2k-2$». А если $\beta_k = 1$, то мы можем рассматривать предполный класс из P_{2k-1}, который соответствует порядку $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2k-2}$ «$2k-2$» и кроме этого возьмем еще класс функций, который получаем так, что все функции предыдущего класса, в котором на каком-то месте было значение $2k-2$, заменяем на $2k-1$.

Обозначим через P_k^γ предполный класс в k-значной логике P_k, определяемый порядком монотонности, который задается отрезком длины k последовательности γ.

Можно показать, что $P^\gamma = \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} P_k^\gamma$ — есть предполный класс в Q. Различным последовательностям γ будут соответствовать неизоморфные предполные классы. Так как мощность различных последовательностей β из 0 и 1 — континуум, то лемма доказана.

Таким образом нами доказана:

Теорема. Для любого кардинального числа α, равного любому натуральному числу, $\varkappa_0$ или $\mathfrak{C}$ существует предельная логика, мощность множества всех различных предполных классов которой равна α.

3°. Используя конструкцию Г. П. Гаврилова [4] и методы данной статьи, можно показать также, что:

Для любого кардинального числа α, равного любому натуральному числу, $\varkappa_0$ или $\mathfrak{C}$ существует континуум попарно неизоморфных предельных логик, в каждой из которых ровно α предполных классов.

On cardinal numbers of sets of precomplete classes in limit logics

Limit logics were introduced by S. V. Jablonski. The definition of limit logic implies immediately that each limit logic has at most a continuum of precomplete classes. In the paper the question about the number of precomplete classes in various limit logics is studied more precisely.

The main results are:

1) for any naturae number n, there is limit logic with just n precomplete classes;
2) there is limit logic with denumerable set of precomplete classes;
3) there is limit logic with a continuum of precomplete classes.

All the examples of logics are constructed effectively.

The methods of this paper and of a paper by G. P. Gavrilov allow to establish more strong result: for any cardinal number α from 1)—3), there is a continuum of limit logics no two of which are isomorphic to one another with just α precomplete classes.

Литература

[1] Яблонский, С. В., О предельных логиках, ДАН СССР т. 118, 1958, стр. 657—660.
[2] Яблонский, С. В., Функциональные построения в k-значной логике, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* АН СССР LI, 1958, стр. 5—142.
[3] Мучник, А. А., Ю. И. Янов, О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР, т. 127, 1959, стр. 44—46.
[4] Гаврилов, Г. П., О мощности множества предельных логик, обладающих конечным базисом, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, стр. 115—126.

(Поступило 5-ого апреля 1971 г.)