Procédé pour déterminer les formes normales minimales des fonctions booléennes, en utilisant les règles de minimisation de la fonction de coût

Par B. Papp

Résumé

L'étude présente un procédé pour déterminer toutes les formes normales minimales disjonctives et conjonctives des fonctions booléennes, complètement ou incomplètement spécifiées, en utilisant un théorème concernant les implicants premiers. À l'aide de ce théorème la «fonction de présence» est déduite, et cela contrairement à l'algorithme de Quine-McCluskey, sans que la connaissance de tous les implicants premiers soit supposée. Puis la fonction de coût est définie avec ses propriétés générales, et les règles de minimisation du coût en sont déduites. La détermination des formes minimales est accomplie à l'aide de ces règles. La pratique est illustrée par un exemple à huit variables.

Nomenclature de certaines notions de l'étude

1. Nous entendons par «fonction logique», ou booléenne, une fonction définie avec ses variables sur un ensemble de propositions, à tout élément de l'ensemble étant ordonnée l'une des deux valeurs suivantes: «vraie» ou «fausse».

2. Par l'expression «points d'une fonction logique», sauf d'autre remarque, nous entendons les lieux des valeurs vraies (les points vrais) du domaine de la fonction.

3. Par l'expression «monôme» nous désignons une fonction logique n'ayant que conjonction ($\wedge$) entre ses variables; les variables peuvent être affirmées ou niées. Là, où l'opération n'est pas marquée, on doit toujours entendre conjonction. Dans la notion de monôme est comprise la fonction «constante vraie (v)», mais la fonction «constante fausse (f)» est exclue.

4. La marque «$\sim$» au dessus des variables sert à exprimer, que la variable en question ($\tilde{x}$) peut être ou bien affirmée (x), ou bien niée ($\bar{x}$), mais toujours l'un des deux sens [2].

5. L'expression «la fonction logique P recouvre Q» équivaut à «Q implique P», ou à «Q est implicant de P» ($Q \rightarrow P$).

6. Nous appelons «facteurs» les expressions se rattachant par conjonction ($\wedge$), et «termes» se rattachant par disjonction ($\vee$).

7. Nous appelons «facteur élémentaire» un facteur n'ayant qu'une seule variable affirmée ou niée.
8. La marque $\leftrightarrow$ sert à representer l'équivalence.

Pour exprimer une fonction booléenne en sa forme disjonctive minimale, nous utiliserons un théorème concernant les implicants premiers, nommé «théorème de base». Les déductions de ce théorème et de ses auxiliaires seront publiées dans la partie préambulaire qui suit.

§ 1. Déduction et conséquence du théorème de base

Théorème auxiliaire 1. Pour qu'un monôme R soit recouvert par un monôme P, il faut et il suffit, que P soit composée de tels facteurs élémentaires, qui figurent tous dans le monôme R.

Démonstration. La suffisance de la condition est évidente. Quant à la nécessité, qu'il soit supposé qu'un certain facteur élémentaire $\tilde{x}$ figurant dans P, ne figure pas dans R. On peut écrire donc: $P=\tilde{x}Q$. Regardons maintenant le monôme $S=\bar{\tilde{x}}R$, qui justement parce que $\tilde{x}$ ne figure pas dans R, ne peut être constamment faux, mais il est vrai sur un sous-ensemble des points de R. De l'expressions de P et de S découlent $S\rightarrow R$ et $S\rightarrow\bar{P}$, c'est à dire qu'il y a au moins un point, où R est vraie, mais P est fausse, et ainsi R ne peut être recouverte par P.

La théorème auxiliaire 1 veut dire, que tous les monômes qui recouvrent R, peuvent être dérivés en supprimant des facteurs de R.

Nous aurons besoin encore des définitions suivantes:

A). Un facteur élémentaire $\tilde{x}_i$ d'un monôme R construit des variables d'une fonction logique φ, — est nommé «facteur supprimable de R», si le monôme réduit R_i, dérivé de R par la suppression de $\tilde{x}_i$, implique φ. C'est à dire, si $\tilde{x}_i$ satisfait aux conditions suivantes: $R=\tilde{x}_iR_i$; $R_i\neq R$; $R_i\rightarrow\varphi$.

(D'après cela pour les implicants premiers s'impose la définition suivante: L'implicant premier est un monôme implicant, qui n'a pas de facteur supprimable.)

B). Tels facteurs élémentaires $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$ d'un implicant premier P d'une fonction φ, qui sont supprimables d'un monôme R recouvert par P, sont dénommés les «facteurs critiques de P relatifs à R»; respectivement, les monômes R_i, pour lesquels $R=\tilde{x}_iR_i$; $R_i\neq R$; $i=1, 2, \ldots, k$ sont valables, sont dénommés les «monômes critiques de R relatifs à P».

De la définition **A)** il est évident, que tous les facteurs élémentaires d'un monôme R (implicant de φ) peuvent être rangés dans l'une ou l'autre des deux classes suivantes: «les supprimables» et «les non supprimables».

Qu'il soit désignée par R^* la conjonction de tous les facteurs non supprimables de R. Si tous les facteurs de R sont supprimables, soit $R^*=v$ (const. vraie).

Théorème auxiliaire 2. R^* recouvre tous les monômes Q, qui recouvrent R et impliquent φ.

Démonstration. Qu'il soit supposé, que R^* ne recouvre pas Q. Ainsi, selon le théorème auxiliaire 1 R doit avoir (au moins) un facteur élémentaire $\tilde{x}_\alpha$, qui figure dans R^*, et qui ne figure pas dans Q. Désignons par R_α le monôme réduit, pour lequel $R=\tilde{x}_\alpha R_\alpha$; $R_\alpha \neq R$ sont valables. Il est évident, que tous les facteurs élémentaires de Q figurent dans R_α, donc $R_\alpha \to Q$. De là, par $Q \to \varphi$ vient $R_\alpha \to \varphi$, c'est à dire $\tilde{x}_\alpha$ doit être facteur supprimable de R, contrairement à la définition de R^*.

Le théorème auxiliaire 2 équivaut à ce que dans chaque monôme Q, qui recouvre R et implique φ, doivent figurer tous les facteurs non supprimables de R.

La première partie du théorème de base est la suivante

Théorème 1. Pour qu'un monôme R, qui implique la fonction φ, soit recouvrable uniquement par un seul implicant premier de φ, il faut et il suffit, que R^* soit implicant de φ.

(La condition peut être formuler encore: que les facteurs «individuellement supprimables» de R, soient «supprimables tous à la fois».)

Démonstration. La suffisance de la condition peut être compris aisément: Si R^* implique φ, il existe un implicant premier P, qui recouvre R^* (et avec cela R aussi). Selon le théorème auxiliaire 2 R^* recouvre aussi P, donc $P=R^*$, et aucun autre implicant premier ne peut pas recouvrir R, parce que deux implicants premiers différents ne se recouvrent pas l'un l'autre [6]. (Si R^* implique φ, et R comprend toutes les variables de φ, R^* est donc implicant premier «essentiel».)

Quant à la nécessité, qu'il soit supposé, que R^* n'implique pas φ, qui revient à dire, (que les facteurs qu'on peut supprimer de R individuellement, ne soient pas supprimables tous à la fois, mais) qu'un certain implicant premier P, qui recouvre R, renferme quelque(es)-un(s) de l'ensemble des facteurs supprimables de R, c'est à dire a pour facteurs critiques relatifs à R les suivants: $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$; $(k \geqq 1)$. Regardons maintenant le monôme critique R_α, $(1 \leqq \alpha \leqq k)$ qui est recouvrable par un implicant premier P_α. Or P_α (qui recouvre aussi R) ne peut être égale à P, ($\tilde{x}_\alpha$ figurant dans P, et ne figurant pas dans P_α) c'est à dire, l'existence d'un facteur critique de P relatif à R implique l'existence au moins d'un deuxième implicant premier, qui recouvre R.

En outre, on peut comprendre facilement la deuxième partie du théorème de base comme voici

Théorème 2. Pour qu'un implicant premier P' de la fonction φ, qui diffère de P, recouvre aussi (en dehors de P) le monôme R, il faut et il suffit, que P' recouvre quelqu(es)-un(s) des monômes critiques de R relatifs à P.

Démonstration. La suffisance de la condition selon le théorème auxiliaire 1 est évidente. Pour prouver la nécessité, qu'il soit supposé, que P' recouvre R. P ne pouvant pas recouvrir P', d'après le théorème auxiliaire 1 doit avoir (au moins) un facteur $\tilde{x}_\alpha$ qui ne figure pas dans P'. Selon le théorème auxiliaire 2 $\tilde{x}_\alpha$ doit être l'un des facteurs critiques de P relatif à R, et (l'auxiliaire 1 met en évidence, que) le monôme critique respectif R_α est recouvert par P'.

En faisant la synthèse des théorèmes 1 et 2, on peut formuler le théorème servant comme une nouvelle base au «recouvrement des fonctions» comme suite

Théorème de base. Un monôme R, implicant d'une fonction φ ne peut être recouvert en dehors d'un implicant premier P, que par les implicants premiers qui recouvrent quelqu(es)-un(s) des monômes critiques de R relatifs à P. Dans le cas, et seulement, où il n'existe aucun monôme critique, ($P=R^*$, et) le seul implicant premier qui recouvre R, est P.

A l'aide de l'emploi recurrent de ce théorème on peut déterminer tous les implicants premiers recouvrant un point T quelconque d'une fonction booléenne φ sans la connaissance de tous les autres implicants premiers de la fonction.

L'algorithme pour atteindre ce but a deux parts.

A: Trouver un implicant premier P, qui recouvre un monôme R implicant de φ. (Cela peut être effectuer en examinant les monômes R_i dérivés de R par la suppression d'un seul facteur élémentaire $\tilde{x}_i$ de R, s'ils impliquent φ, ou non? S'il n'y a pas aucun implicant parmi les R_i, alors R est implicant premier; et si on arrive à un implicant R_α, on transmet le procédé sur R_α au lieu de R.)

B: Trouver les monômes critiques $R_1, R_2, \dots, R_k$ de R relatifs à P. (Par exemple en déterminant parmi les facteurs élémentaires de P ceux, qui sont supprimables de R.)

En accomplissant ces deux pas sur le monôme $R=T$, on arrive à un implicant premier P_1 qui recouvre T. Si T n'a pas de monôme critique relatif à P_1, l'algorithme est fini; et s'il y a des monômes critiques, on a pour exécuter les deux pas A et B sur chacun d'eux, et cela doit être répété jusqu'à qu'il ne se présentera plus aucun monôme critique.

La hiérarchie des operations consécutives engendre un algorithme représentable par un graphe de type d'arbre, et le théorème précédent garantit, que cet algorithme nous présente tous les implicants premiers qui recouvrent T sans nous présenter aucun autre.

§ 2. Le recouvrement d'une fonction booléenne incomplètement spécifiée

Qu'il soit φ une fonction booléenne incomplètement spécifiée, dont le domaine se subdivise en trois parts: les points vrais, les points faux, et les points à valeur indéterminée. Le recouvrement de φ par des implicants premiers peut être effectué de la manière suivante:

1. Dans le cas où la fonction φ n'est pas donnée sous forme de table de vérité, il faut préciser l'ensemble V de tous les points vrais, où la valeur vraie est impérative.

2. Comme de la littérature est connu, dans le cas d'une fonction incomplètement spécifiée on a pour recouvrir seulement l'ensemble V, et cela par des implicants premiers de la fonction logique nommée «supérieure»; donc il faut préciser la fonction supérieure φ^* de φ, qui s'obtient en donnant aux points indéterminés de φ la valeur vraie, et en laissant intacts tous les autres points [3].

3. On examine successivement par le théorème 1 les points de l'ensemble V, s'il y en a des points qui ne sont recouvrables que par un seul implicant premier de la fonction supérieure φ^*. Quand on arrive au premier point A_1^1 satisfaisant à cette condition, il est à tenir note de l'implicant premier P_1^1 qui le recouvre, et à retrancher tous les points recouverts par P_1^1 (ceux qui appartiennent à V) de l'ensemble V comme recouverts déja. Ce procédé doit être répété sur le sous-ensemble actuel de V qui reste, jusqu'à qu'il n'existera plus aucun point recouvrable uniquement par un seul implicant premier dans la partie non recouvert de V. Ainsi on obtient une suite $E=P_1^1, P_2^1, \dots, P_e^1$ des implicants premiers (se révélant essentiels) [8].

4. Puis à l'aide du théorème de base on continue sur le sous-ensemble non recouvert de V par la recherche des points qui ne sont recouvrables que par deux implicants premiers de φ^*. Le premier point satisfaisant à cette condition soit désigné par A_1^2, et les éléments de la paire des implicants premiers qui le recouvrent par P_1^2 et P_2^2, et qu'on retranche du sous-ensemble actuel de V (jusqu'ici non recouvert) la portion que recouvre la conjonction $P_1^2 \wedge P_2^2$. Ensuite on fixe sur le sous-ensemble actuel le point suivant A_2^2 (si ça existe), que peuvent recouvrir seulement les implicants premiers P_3^2 et P_4^2, et le procédé sera répété jusqu'à manquer de l'ensemble non recouvert les points recouvrables précisement par deux implicants premiers. Puis on continue par les points qui sont recouvrables précisement par trois, par quatre etc. implicants premiers, en retranchant toujours les points recouverts par la conjonction des ternaires, des quaternaires etc. jusqu'à ce que la dernière portion de l'ensemble V contenant un r-ième point A_r^k qui peut être recouvert précisement par k implicants premiers, sera recouvert par la conjonction de ces k implicants premiers.

Le fruit du procédé décrit en ces quatre points est une suite finie des suites d'implicants premiers, des individues, des paires, des ternaires etc. Selon les notations employées, en mettant entre parenthèses les paires, les ternaires etc., la suite composée (S) est de la forme suivante

$$
\begin{aligned}
S = {} & P_1^1, P_2^1, \ldots, P_e^1, \\
& (P_1^2, P_2^2), (P_3^2, P_4^2), \ldots, (P_{2m-1}^2, P_{2m}^2), \\
& \ldots \\
& (P_1^k, P_2^k, \ldots, P_k^k), \ldots, (P_{kr-k+1}^k, P_{kr-k+2}^k, \ldots, P_{kr}^k).
\end{aligned}
$$

Il est à remarquer, que des implicants premiers entre les parenthèses différentes peuvent être identiques, et que dans cette suite ne doivent pas figurer tous les implicants premiers de φ^*.

§ 3. L'obtention de la fonction de présence G

En suivant les indications de la suite S du § 2, on peut construire une fonction logique G pour bien utiliser les implicants premiers de S. La variable G_j^i de la fonction G se traduit par la proposition, que l'implicant premier P_j^i sera utilisé dans une certaine formule F, laquelle F est une disjonction d'implicants premiers de φ^*.

La formule de la fonction G sera construite de la suite S en écrivant au lieu de chaque lettre P la lettre G avec les mêmes indices, et en mettant la disjonction ($\vee$) au lieu de chaque virgule qui se trouve à l'interieure des parenthèses, et la conjonction ($\wedge$) au lieu de toute autre virgule. Donc,

$$
\begin{aligned}
G = {} & G_1^1 \wedge G_2^1 \wedge \ldots \wedge G_e^1 \wedge \\
& \wedge (G_1^2 \vee G_2^2) \wedge (G_3^2 \vee G_4^2) \wedge \ldots \wedge (G_{2m-1}^2 \vee G_{2m}^2) \wedge \\
& \ldots \\
& \wedge (G_1^k \vee G_2^k \vee \ldots \vee G_k^k) \wedge \ldots \wedge (G_{kr-k+1}^k \vee G_{kr-k+2}^k \vee \ldots \vee G_{kr}^k).
\end{aligned}
$$

Nous avons la conception, que la fonction logique G a aussi pour variables les instructions concernant tous les autres implicants premiers de φ^*, qui éventuellement ne se trouvent pas dans la suite S, mais de ces variables la valeur de G est indépendant.

Dans tous les cas où la valeur de G est vraie, on utilise à la construction de F tous les membres de la suite E, et au moins un implicant premier de chaque parenthèse (qui recouvre naturellement la conjonction des implicants premiers de la même parenthèse). De la construction de la suite S découle, que dans ce cas tout l'ensemble V sera recouvert, ce qui signifie, que si la valeur de la fonction G concernant une formule F est vraie, la fonction définie par la formule F est égale à φ.

Et dans tous les cas où la valeur de G est fausse, — ou qu'il manque de F quelqu'un des implicants premiers de E (par ex. P_i^1), ou qu'il manquent tous les implicants premiers fermés d'une parenthèse. Mais ainsi F ne peut pas recouvrir un point A_i^1 de V qui est recouvrable seulement par l'implicant premier P_i^1 de E, qui manque, ou bien un point A_j^h qui est recouvrable seulement par les h implicants premiers qui manquent tous de la formule F. C'est pourquoi la formule F construite sous cette condition ne peut pas exprimer la fonction φ.

Ça veut dire, que de l'ensemble de toutes les formules F qui sont disjonctions d'implicants premiers de φ^*, la fonction G sélecte le sous-ensemble, dont les éléments sont égaux à φ; notamment à tout point vrai de la fonction G appartient une telle formule F, et en dehors de celles-là n'existe aucune autre disjonction d'implicants premiers de φ^* qui puisse exprimer φ.

§ 4. Propriétés et règles de minimisation de la fonction de coût

Du § 3 il est évident, que les points (vrais et faux) du domaine de la fonction G sont en correspondence biunivoque avec les formules F (égaux et inégaux à la fonction φ) définies comme disjonctions d'implicants premiers de φ^*. Ainsi à chaque point du domaine de G nous pouvons ordonner un nombre réel, le coût $\mathscr{K}$ de la formule F, laquelle F est construite selon les instructions qui s'appartiennent précisément au point en question de G.

Après avoir précisé le coût $\mathscr{K}$ qui est d'ailleurs une fonction pseudo-booléenne définie sur le domaine de G, le problème de minimisation de la forme normale disjonctive de φ peut être formulé de la manière suivante. Sur le sous-ensemble du domaine de la fonction G, là où la valeur de G est vraie, il faut chercher les points auxquels appartient le coût minimum.

Quant aux propriétés de la fonction de coût $\mathscr{K}$, nous imposerons quelques restrictions, par lesquelles le procédé deviendra beaucoup plus simple.

À vrai dire nous avons fait déjà la première restriction, ayant défini la fonction de coût seulement sur le domaine de la fonction G; ainsi donc

I. Les formes normales disjonctives de φ qui ne sont pas construites exclusivement des implicants premiers de φ^*, sont exclues de notre recherche.

Quant aux autres, qu'il soit désigné par $P_1, P_2, \ldots, P_z$ la suite de tous les implicants premiers de φ^*, ($P_i = P_j$ subsistant seulement si $i=j$) et respectivement par $G_1, G_2, \ldots, G_z$ la totalité des variables de G, G_i étant l'instruction d'utilisation de P_i dans F $(1 \leqq i \leqq z)$.

Le coût k_i des formules F qui comprennent un seul implicant premier P_i, soit dénommé coût élémentaire, ou coût de l'implicant premier P_i. En exprimant cette chose par le symbole $\mathscr{K}$ de la fonction de coût, on peut écrire

$$\mathscr{K}[\bar{G}_1\bar{G}_2\dots\bar{G}_{i-1}G_i\bar{G}_{i+1}\bar{G}_{i+2}\dots\bar{G}_z] = k_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, z).$$

(G_i seule est affirmée, et les autres $z-1$ variables sont barrées.)

Les autres restrictions ou exigences à l'égard de $\mathscr{K}$ sont les suivantes

II. Tous les coûts élémentaires sont positifs,

$$k_i > 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, z).$$

III. Le coût de chaque formule F est égal à la somme des coûts d'implicants premiers qui s'y trouvent.[1]

À ce propos nous stipulons encore, que dans la formule F figureront seulement des implicants premiers différentes; et pour l'intégralité, que le coût de la formule vide (qui n'a aucun implicant premier) est égal à 0.

Des relations décrites ci-dessus il est évident, qu'en partant des coûts élémentaires k_i, $(i=1, 2, \dots, z)$ et en employant l'exigence **III.** on peut déterminer facilement le coût pour chaque point du domaine de G, c'est à dire pour toute formule F.

Maintenant nous voulons expliquer la notion du coût minimum plus généralement.

Nous entendons par le coût minimum d'une fonction logique X qui est construite de variables de G — en symboles $\mathscr{K}_{\min}[X]$ —, le coût minimum sur la partie du domaine de G, où X est vraie.

À l'aide des exigences **II.** et **III.** on peut comprendre directement la règle suivante

Règle 1. D'un monôme à minimiser on peut négliger les variables barrées, et le coût minimum du monôme est égal à la somme des coûts élémentaires appartenants aux variables affirmées qui s'y trouvent.

On peut comprendre aussi facilement la règle suivante

Règle 2. Le coût minimum d'une disjonction à plusieurs termes est égal au minimum des coûts minimums des termes séparés. En symboles,

$$\mathscr{K}_{\min}[X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n] = \min\{\mathscr{K}_{\min}[X_1], \mathscr{K}_{\min}[X_2], \dots, \mathscr{K}_{\min}[X_n]\}$$

où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des fonctions logiques des variables de G.

Il est à observer que la règle 2 n'utilise point les exigences **II.** et **III.**, mais elle est basée simplement sur le fait, que le point du coût minimum doit être recouvert au moins par l'un des termes de la disjonction.

Il est à déduire encore la règle concernant la conjonction. Que X et Y soient deux fonctions logiques des variables de G. Supposons, que X et Y n'ont pas aucune «variable effective» commune [6]. (Celle-ci n'est pas une condition nécessaire de la règle à déduire, mais elle est suffisante seulement.) Dans ce cas on aura

$$\mathscr{K}_{\min}[X \wedge Y] = \mathscr{K}_{\min}[X] + \mathscr{K}_{\min}[Y]. \qquad (1)$$

[1] On peut rencontrer le cas aussi, où le surcroît de coût causé par l'incorporation d'un implicant premier nouveau dépende des termes qui se trouvent déjà dans F. Naturellement dans un pareil cas l'exigence **III.** n'est pas accomplie.

Démonstration. Que des formes normales disjonctives de X et de Y soient,

$$X = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_i \vee \dots \vee X_m$$

et

$$Y = Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_j \vee \dots \vee Y_n.$$

Nous pouvons supposer, que dans ces formules ne figurent que les variables effectives de X et de Y. Selon la règle 2 il existe une α $(1 \leqq \alpha \leqq m)$ et une β $(1 \leqq \beta \leqq n)$ por lesquelles

$$\mathcal{K}_{\min}[X] = \mathcal{K}_{\min}[X_\alpha], \quad \text{et respectivement} \quad \mathcal{K}_{\min}[Y] = \mathcal{K}_{\min}[Y_\beta] \tag{2}$$

s'accompliront, ce qui signifie, que pour toute i $(1 \leqq i \leqq m)$ et j $(1 \leqq j \leqq n)$

$$\mathcal{K}_{\min}[X_\alpha] \leqq \mathcal{K}_{\min}[X_i] \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{\min}[Y_\beta] \leqq \mathcal{K}_{\min}[Y_j] \tag{3}$$

sont valables. En exécutant la conjonction $X \wedge Y$, selon le produit de Descartes on a

$$X \wedge Y = X_1 Y_1 \vee \dots \vee X_\alpha Y_\beta \vee \dots \vee X_i Y_j \vee \dots \vee X_m Y_n \tag{4}$$

X_i et Y_j n'ayant pas de commune variable, dans le monôme $X_i Y_j$ (qui est un monôme des variables de G) toutes les variables de X_i et de Y_j se présentent sans «absorbtion», c'est pourquoi à l'aide de la règle 1 on a

$$\mathcal{K}_{\min}[X_i Y_j] = \mathcal{K}_{\min}[X_i] + \mathcal{K}_{\min}[Y_j]. \tag{5}$$

En utilisant l'égalité 5 à l'aide de 3 découle

$$\mathcal{K}_{\min}[X_\alpha Y_\beta] \leqq \mathcal{K}_{\min}[X_i Y_j]. \tag{6}$$

Enfin de 4 par la règle 2 et à l'aide de 6 de 5 et de 2 vient 1.

Il est facile à comprendre, que sous pareilles conditions l'égalité 1 peut être généralisée pour plusieurs facteurs, c'est à dire la règle suivante est applicable:

Règle 3. Dans le cas où une conjonction à plusieurs facteurs satisfait à la condition, que les paires combinables de ses facteurs n'ont pas de variable effective commune, la minimisation de son coût peut être exécutée par facteurs, et le coût minimum de la conjonction est égale à la somme des coûts minimums de ses facteurs. En symboles

$$\mathcal{K}_{\min}[X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n] = \mathcal{K}_{\min}[X_1] + \mathcal{K}_{\min}[X_2] + \dots + \mathcal{K}_{\min}[X_n]$$

où X , $X_2, \dots, X_n$ sont des fonctions logiques sans variables communes.

§ 5. L'utilisation des règles de minimisation

Étant en possession des règles du § 4 nous revenons à la minimisation du coût de la fonction de présence G, c'est à dire à la détermination de $\mathcal{K}_{\min}[G]$.

D'abord les facteurs composés de la fonction G, c'est à dire ceux qui sont entre parenthèses, doivent être regroupés et mises entre crochets d'une telle manière, qu'aucune variable d'un crochet ne se présente pas à l'extérieur de ce crochet. Ainsi, il faut diviser la fonction G par crochets en tant de sous-fonctions se rattachant par conjonction, qu'il est possible. Quant aux variables avec l'indice supérieure 1, il est convenable de les mettre en un seul groupe. Ainsi les expressions dans les crochets satisferont à la condition de la règle 3, donc on peut minimiser par crochets.

Puis il faut réduire chaque sous-fonction en sa forme normale disjonctive, ainsi la règle 2 sera utilisable. Enfin à l'aide de la règle 1 le problème se réduit aux sélections des termes minimaux de suites de nombres bien définies.

Il est à remarquer, que les implicants premiers de φ^* qui ne se trouvent pas dans la suite S du § 2, sont tout à fait inutiles au point de vue de la minimisation.

La méthode pour déterminer les points du coût minimum de la fonction G sera représentée par un exemple.

En partant de la fonction (complètement spécifiée)

$$\varphi = (A\bar{B} \vee B\bar{C} \vee C\bar{D}) \leftrightarrow (D\bar{E} \vee E\bar{F} \vee G\bar{H}) \qquad (=\varphi^*)$$

ayant 8 variables et 122 points vrais, on arrive à une suite S qui comprende 25 implicants premiers, dont 10 sont essentiels.

Au lieu de donner les détails nous faisons savoir, que la suite S était déterminée à l'aide du théorème de base du § 1, en employant dans ce cas une méthode manuelle des cartes logiques.[2]

Pour la clarté et la concision nous voulons employer des indices simples, en désignant les implicants premiers essentiels par $E_1, E_2, \dots, E_{10}$, et leurs présence dans la formule F par G_0. L'utilisation dans la formule F d'un implicant premier P_i sera désignée par G_i. Le coût de chaque implicant premier soit compté égale au nombre total des lettres qui s'y trouvent.

Les implicants premiers de S et leurs coûts sont les suivants

$E_1 = A\bar{B}D\bar{E}$	4	$P_3 = \bar{A}CDEFH$	6
$E_2 = A\bar{B}G\bar{H}$	4	$P_4 = \bar{A}\bar{B}DEFH$	6
$E_3 = B\bar{C}D\bar{E}$	4	$P_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}EFH$	6
$E_4 = B\bar{C}G\bar{H}$	4	$P_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}FH$	6
$E_5 = C\bar{D}E\bar{F}$	4	$P_7 = B\bar{C}D\bar{F}$	4
$E_6 = C\bar{D}G\bar{H}$	4	$P_8 = B\bar{C}E\bar{F}$	4
$E_7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{G}$	6	$P_9 = B\bar{D}E\bar{F}$	4
$E_8 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}H$	6	$P_{10} = \bar{A}CDEF\bar{G}$	6
$E_9 = BCDEF\bar{G}$	6	$P_{11} = \bar{A}\bar{B}DEF\bar{G}$	6
$E_{10} = BCDEFH$	6	$P_{12} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}EF\bar{G}$	6
		$P_{13} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}F\bar{G}$	6
$P_1 = \bar{A}BD\bar{F}$	4	$P_{14} = A\bar{C}E\bar{F}$	4
$P_2 = A\bar{B}E\bar{F}$	4	$P_{15} = A\bar{D}E\bar{F}$	4.

Selon les notations employées la fonction G (marquée ici par G') se présente sous la forme suivante

$$G' = G_0 \wedge (G_1 \vee G_2) \wedge (G_3 \vee G_4) \wedge (G_4 \vee G_5) \wedge (G_5 \vee G_6) \wedge (G_7 \vee G_8) \wedge (G_8 \vee G_9) \wedge$$
$$\wedge (G_{10} \vee G_{11}) \wedge (G_{11} \vee G_{12}) \wedge (G_{12} \vee G_{13}) \wedge (G_2 \vee G_{14} \vee G_{15}).$$

[2] C'est une invention de l'auteur pour exécuter des opérations logipues jusqu'à 8 ou 10 variables d'entrée.

Par un regroupement convenable

$$G' = [G_0] \wedge [(G_1 \vee G_2) \wedge (G_2 \vee G_{14} \vee G_{15})] \wedge [(G_3 \vee G_4) \wedge (G_4 \vee G_5) \wedge (G_5 \vee G_6)] \wedge$$
$$\wedge [(G_7 \vee G_8) \wedge (G_8 \vee G_9)] \wedge [(G_{10} \vee G_{11}) \wedge (G_{11} \vee G_{12}) \wedge (G_{12} \vee G_{13})].$$

En réduisant les crochets à leurs formes normales disjonctives, et en faisant apparaitre le coût de chaque terme en dessous

$$G' = [\underset{48}{G_0}] \wedge [\underset{8}{G_1 G_{14}} \vee \underset{8}{G_1 G_{15}} \vee \underset{4}{G_2}] \wedge [\underset{12}{G_3 G_5} \vee \underset{12}{G_4 G_5} \vee \underset{12}{G_4 G_6}] \wedge [\underset{8}{G_7 G_9} \vee \underset{4}{G_8}] \wedge$$
$$\wedge [\underset{12}{G_{10} G_{12}} \vee \underset{12}{G_{11} G_{12}} \vee \underset{12}{G_{11} G_{13}}].$$

En choisissant par crochet le coût minimum

$$G'_{\min} = [\underset{48}{G_0}] \wedge [\underset{4}{G_2}] \wedge [\underset{12}{G_3 G_5} \vee \underset{12}{G_4 G_5} \vee \underset{12}{G_4 G_6}] \wedge [\underset{4}{G_8}] \wedge [\underset{12}{G_{10} G_{12}} \vee \underset{12}{G_{11} G_{12}} \vee \underset{12}{G_{11} G_{13}}].$$

Donc, les formules F respectives, c'est à dire les formes normales minimales de φ sont les suivantes

$$F_{\min} = E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_{10} \vee P_2 \vee P_8 \vee \begin{Bmatrix} P_3 \vee P_5 \\ P_4 \vee P_5 \\ P_4 \vee P_6 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} P_{10} \vee P_{12} \\ P_{11} \vee P_{12} \\ P_{11} \vee P_{13} \end{Bmatrix}.$$

On peut choisir arbitrairement une ligne de chaque accolade, ainsi on obtient 9 expressions différentes pour la forme normale disjonctive minimale de la fonction φ, chacune ayant le coût de 80 lettres.

Comme il est connu, la minimisation de la forme normale conjonctive est ramenable à celle de la forme disjonctive. Dans ce cas le procédé exposé doit être accompli sur la fonction $\bar{\varphi}$, et après la négation de la forme disjonctive on obtient la forme conjonctive minimale de φ.

Il est enfin à remarquer, que dans les cas des fonctions incomplètement spécifiées le procédé exposé aura une utilité plus saillante, car il rend possible de recouvrir l'ensemble V sans la détermination des implicants premiers (éventuellement d'un grand nombre), qui ne sont pas intéressés dans les recouvrements à coût minimal.

Littérature

[1] Chinal, J., *Techniques booléennes et calculateurs arithmétiques*, Dunod, Paris, 1967.
[2] Kuntzmann, J., *Algèbre de boole*, Dunod, Paris, 1965.
[3] Perrin, J. P., M. Denouette, E. Daclin, *Systèmes logiques*, Tome I, Dunod, Paris, 1967.
[4] Necula, N. N., An algorithm for the automatic approximate minimisation of boolean functions, *IEEE Trans.*, v. C-17, 1968.
[5] Hockney, R. W., An intersection algorithm giving all irredundant normal forms from a prime implicant list, *I.R.E. Trans.*, v. EC-11, 1962, pp. 289—290.
[6] Ádám, A., *Truth functions and the problem of their realization by two-terminal graphs*, Budapest, 1968.
[7] Varga, T., *Matematikai logika kezdőknek*, I. Budapest, 1960.
[7a] Varga, T., *Mathematische Logik für Anfänger*, I. Berlin, 1965.
[8] McCluskey, Ed. T. C. Bartee *A surwey of switching circuit theory*, McGraw-Hill, New York, 1962.

(Recomposé le 30. janvier 1971)