Sur des problèmes de formation et de recherche en informatique

Par L. ILIEV

1. La science mathématique élabore des modèles de phénomènes réels. Ses notions premières sont d'images des propriétés substantielles de l'objet dont elle s'occupe. De plus, chaque connaissance acquise est aussi objet de recherche, donc, nous dirons que dans les recherches mathématiques on peut partir de phénomènes «plus concrets» ou «plus généraux», réalisant ainsi un degré d'abstraction «plus bas» ou «plus haut». Réfléchissant dans ses modèles les propriétés et les relations des phénomènes, la mathématique élabore sa langue symbolique au moyen d'opérations sur les notions mathématiques. Mais, la possibilité d'obtenir des applications importantes et constantes des mathématiques s'élargit seulement dans le cas où l'appareil des opérations atteint un plus haut degré dans son évolution. La découverte du calcul différentiel et intégral, avec sa langue et ses opérations, est un très grand pas marquant une époque dans l'évolution de la science, mais ce n'est qu'après avoir bâti l'appareil des équations différentielles, que la mathématique a pu montrer ses possibilités dans ce domaine. Le développement et les applications de la mathématique, l'amelioration de sa langue et de son appareil ont posé des problèmes liés à la nécéssité d'étudier et de fonder cet appareil en même temps que le problème de la construction logique des modèles mathématiques, comme par exemple le passé nous a légué les modèles de la géometrie il y a deux mille ans.

Il a été établi que certaines puissantes méthodes mathématiques s'élaborent à l'aide d'opérations et de relations algèbriques et de l'appareil des processus infinis, lui-même étant déterminé par les notions de limite et de continuité. C'est ainsi que l'algèbre et la topologie ont posé la base sur laquelle ont été construites les sciences mathématiques. Quand on bâti un modèle mathématique d'une façon logique et axiomatique, en partant d'un certain «degré d'abstraction» — de certaines notions — nous tâchons d'établir quelles sont, parmi toutes ces notions, les «notions fondamentales» à l'aide desquelles on peut déduire, simplement par la logique formelle, toutes les propriétés du modèle donné. C'est ainsi qu'on construit une théorie, un modèle abstrait, une structure mathématique. Il faut noter que la méthode axiomatique ne se réduit pas seulement à une déduction des propriétés de la structure à partir des «propriétés fondamentales», mais, il faut supposer une «abstraction préliminaire», c'est-à-dire trouver certaines propriétés substantielles, parmi les relations et les objets de la réalité objective, qui sont «plus concrètes» ou appartiennent à un «plus haut degré d'abstraction». Pouvoir discerner les propriétés mathématiques substantielles parmi le labyrinthe d'une variété donnée, voici un des cas où se manifeste l'adresse, l'«intuition», la création mathématique. Une des caractéristiques des mathématiques modernes est que la méthode axiomatique est devenue un appareil constant d'investigation mathématique.

Une fois établis les éléments de l'appareil mathématique, l'appareil des opérations algébriques, l'appareil de la topologie et la méthode axiomatique elle-même, un nouveau problème s'est dégagé: celui de diviser la mathématique en structures abstraites et de les ordonner suivant leur degré d'abstraction de manière croissante. On a déterminé comme structures fondamentales les structures algèbriques les structures des espaces ordonnés et les structures topologiques. Grâce à elles, on édifie les structures multiples et spéciales. Avec cette nouvelle ordonnance des structures mathématiques, le champ des sciences mathématiques s'est élargi car les structures fondamentales devinrent plus générales. En même temps, dans ce champ agrandi, on trouve des «taches blanches», qui, plus tard, se comblèrent de nouvelles sciences mathématiques — des structures.

Un des phénomènes fondamentaux des mathématiques contemporaines est de construire des structures mathématiques. Pour pouvoir révéler l'importance de ce phénomène dans l'évolution de la science moderne il faut tenir compte de certains faits:

Supposons, tout d'abord, qu'en partant de certains phénomènes réels, nous puissions construire un modèle abstrait de ces phénomènes qui réfléchisse leur propriétés principales. Ce modèle abstrait sera plus simple que les phénomènes réels. Donc, nous pourrons étudier ce modèle, grâce aux méthodes existantes, et établir des lois qui sont dissimulées dans les phénomènes réels, parce que ceux-ci sont envahis par une multitude de propriétés non-substantielles. Ainsi, grâce au modèle abstrait, nous pouvons trouver de nouvelles propriétés dans les phénomènes.

Maintenant, au contraire, supposons construite une structure, et qu'il existe des objets et des phénomènes réels qui la réalisent, c'est-à-dire que la structure ait pour réalisation un modèle isomorphe. Dans ce cas, nos objets auront aussi toutes les propriétés qui découlent de la structure. Il peut y avoir beaucoup de réalisations mais, il ne sera pas nécessaire d'étudier leurs propriétés car celles-ci sont données par les propriétés de la structure. Cette circonstance conduit à des applications qui sont à la base de la science et du progrès technique modernes.

Donc, en général, on peut dire que *la réalisation d'un modèle, appartenant à un domaine donné, par les moyens d'un autre domaine, est une application du premier domaine dans le second.*

Ainsi, les structures peuvent être appliquées pour l'essor du domaine auquel elles appartiennent, à l'évolution d'autres sciences, de la technique etc...

Dans le cas où la réalisation d'un modèle dans un domaine donné se passe constamment et algorythmiquement, on peut dire que ce modèle est introduit ou appliqué en pratique.

La construction des structures abstraites est une activité intellectuelle élevée qui hausse le niveau de l'activité scientifique et de la pensée humaine.

Le problème de la construction des structures se transmet des mathématiques aux autres sciences, dans les arts etc... Bien sûr, leur image, aussi que les phénomènes se développant là, y sont expliqués par la vision que l'on a adoptée.

La construction des structures mathématiques a de l'importance pour l'évolution des sciences mathématiques, pour l'évolution des autres sciences, pour la réealisations de grandes applications, ainsi que pour augmenter le niveau de la pensée humaine et l'essor culturel de la société.

Les structures mathématiques édifiées de façon formelle et logique sont des modèles mathématiques universels qui peuvent être réalisés par différents moyens et être appliquées dans toutes les sciences.

En tenant compte de tout cela: *le problème de la construction et de la réalisation des structures mathématiques est extrêmemment actuel dans la création mathématique contemporaine. Mais avec l'évolution des nouveaux domaines des mathématiques et de la technique de calcul ce problème acquiert une nouvelle signification et un nouveau contenu.*

Pouvoir établir des isomorphismes avec une structure mathématique quelconque, voilà une possibilité extrèmement puissante de la prévision scientifique et des importantes applications, possibilité qui est assez fréquente, car chaque structure a un nombre infini des réalisations de toutes espèces. Ainsi, par exemple, on a trouvé à notre époque que le schéma des opérations arithmétiques en système binaire, la table des valeurs véridiques de la disjonction et de la conjonction dans la logique mathématique et certains schémas diodiques sont des modèles isomorphes. Ainsi, on obtient immédiatement le principe de l'élaboration des machines à calculer éléctroniques qui réalisent des opérations mathématiques et logiques. De cette manière on arrive à une application de la mathématique et de la logique mathématique dans la technique qui apporte un progrès technique important. En général la construction de chaque nouveau schéma triguère dans le domaine de la technique de calcul est un problème de construction d'un schéma logique et de sa réalisation.

Les calculateurs éléctroniques modernes réalisent des structures mathématiques. La Mathématique est à la base de la technique de calcul contemporaine. C'est ce qui constitue le deuxième phénomène fondamental, déterminant les tendances des mathématiques modernes.

L'essor de la technique des calculateurs éléctroniques dépend de l'évolution des certaines structures mathématiques — logiques, étant à la base de cette technique. Mais aussi, l'exploitation de la technique de calcul dépend de l'évolution du très complexe appareil mathématique: les langues algorythmiques, les translateurs, les algorythmes, les programmes. Ainsi a été conçu un complexe de nouvelles sciences mathématiques, représentant en lui-même une direction, que l'on appelle en lanque mathématique moderne «l'assurance mathématique des machines éléctroniques».

Cependant à tout ce que nous venons de dire il faut encore ajouter ceci: Les machines à calculer modernes sont des machines à action programmée. Elles sont capables d'executer les programmes de certains algorythmes, c'est-à-dire de certains processus cybernétiques. Au contraire, pour pouvoir assurer l'exécution, sur un calculateur éléctronique, d'un processus cybernétique naturel ou artificiel, il est nécessaire de trouver son algorythme. Les algorythmes sont des modèles mathématiques de ces processus cybernétiques qui peuvent être modelés sur des machines à calculer. (A l'encontre, par exemple, des processus cybernétiques en bionique qui peuvent être modelés à l'aide d'autres moyens, sans modèles mathématiques.) Dans ce sens, donc, la mathématique est aussi, à la base de l'étude des processus cybernétiques qui sont programmés sur les machines éléctroniques. En général, les possibilités des calculateurs éléctroniques posent d'une nouvelle manière le problème du modelage mathématique.

En tenant compte de ce que nous venons de dire, on peut caractériser les possibilités modernes des mathématiques de la manière suivante:

a) L'appareil des structures mathématiques — les structures fondamentales, multiples et spéciales — a atteint un niveau exeptionellement élevé et accompli. A l'aide de cet appareil, on attaque intensivement les problèmes et on obtient de nouveaux résultats.

b) Cette méthode axiomatique est devenue une méthode constamment active, un appareil des mathématiques modernes, pour l'élaboration des structures mathématiques.

c) Étant la base de la construction de la technique des calculateurs éléctroniques, les mathématiques transforment l'exploitation de ces machines en une puissante méthode mathématique d'investigation des modèles mathématiques et des processus cybernétiques.

Les applications constantes de ces moyens des mathématiques contemporaines démontrent leur haut degré d'*universalité.*

Tout cela nous mène à cette conclusion: *la mathématique moderne a à sa disposition un appareil puissant de création et de réalisation de modèles mathématiques.*

2. Les structures de la mathématique classique furent obtenues surtout par le traitement des modèles mathématiques dans le domaine des sciences physiques, traitement qui s'effectuait en augmentant progressivement l'abstraction. L'amélioration et la transformation en méthode mathématique de la méthode de construction des structures mathématiques, la découverte des machines à calculer et le degré de développement des autres sciences, tout cela mène à la possibilité de construire des modèles mathématiques dans tous les domaines de la connaissance humaine. De nos jours les modèles et les méthodes mathématiques s'appliquent, par exemple en biologie, en économie etc... de la même manière qu'elles s'appliquaient naguère en physique. Maintenant la mathématique se trouve en proche parenté avec certaines sciences comme elle l'était déjà avec la physique. L'étude, à l'aide de moyens mathématiques, des modèles mathématiques appartenant à un certain domaine d'une science donnée, peut s'appeler: «mathématisation» de ce domaine. Ce phénomène appellé mathématisation des sciences a un rôle immense pour l'évolution de toutes les sciences et en premier lieu pour les sciences mathématiques.

La «mathématisation des sciences» est un phénomène courant dans la mathématique moderne qui détermine les tendances générales et les directions de son évolution.

Notons qu'il n'est pas possible d'étudier, à l'aide de l'appareil mathématique existant et des structures actuelles qui, elles, sont obtenues pour la plupart du temps en développant les modèles de la physique, tous les modèles obtenus en observant les phénomènes des autres sciences.

En liaison avec cela, il est nécessaire de rappeler certains phénomènes observés pendant l'évolution des mathématiques:

Les mathématiques servent les formations sociales-historiques en modelant les phénomènes de l'époque étudiée grâce aux moyens mathématiques dont elles disposent alors. C'est dans le processus de cette action que sont conçues des nouvelles structures universelles qui préparent le modelage des nouveaux phénomènes durant la période suivante. Ainsi, les mathématiques furent, en proportion des problèmes du temps, une force productrice dans la réalisation du progrès des époques succéssives.

Durant la première époque de son évolution — de l'antiquité jusqu'a la découverte du calcul différentiel et intégral — la mathématique, en modelant tout d'abord les problèmes de mesure des grandeurs, créa la géométrie d'Euclide et la science des nombres. A cette époque, l'axiomatisation ne fut atteinte qu'en géométrie euclidienne. La théorie des nombres fut exprimée axiomatiquement longtemps après que la mathématique fut entrée dans l'époque suivante de son évolution. En tenant le modèle près de son original (la réalité), les mathématiciens de la première époque le complètèrent non pas de façon formelle-logique, avec les conséquences de ce qui avait été déjà introduit deductivement, mais par de nouvelles images des propriétés de l'original. Ainsi d'une part, ils obtinrent des découvertes importantes et d'autre part, ils accumulèrent suffisamment de matériaux pour effectuer une correction logique, une mise en scène axiomatique. Par ce moyen on obtint des découvertes exceptionnelles au début de l'époque suivante — après la découverte du calcul différentiel et intégral. La puissante méthode de ce calcul donna, grâce à son application immédiate à certains phénomènes, des résultats si importante qu'on laisse de côté la question de la clarté formelle-logique, qui d'ailleurs n'était pas dans les possibilités de cette époque. Le modèle et l'original étaient si près l'un de l'autre, la liaison entre les mathématiques et la réalité si vive, que la noncontradiction logique des nouvelles notions et connaissances par raport à celles déjà existantes, parraissait, par elle-même, évidente. Mais, petit à petit, en accumulant un nombre considérable des résultats, en développant de totes nouvelles sciences mathématiques vers le milieu de siècle passé, vint en premier lieu le problème du fondement formel-logique des théories mathématiques. Ce problème, qui peu à peu, grandit et se transforme en problème de l'élaboration axiomatique des sciences mathématiques, il fallait transformer la méthode axiomatique en appareil mathématique constant créer la structure des structures mathématiques. De plus, toute une série d'«images», employées dans le passé, fut exclue des sciences mathématiques pour des raisons de non-fondement formel-logique. Perdant ainsi la fraîcheur de certains objets et méthodes, les branches mathématiques et la mathématique entière arrivent à une structure beaucoup plus complète. En lignes générales, ce processus se manifeste vers la première moitié de ce siècle et nous pouvons donc dire qu'alors finit la deuxième époque de l'évolution des mathématiques.

Avec l'introduction des problèmes de la cybernétique, l'édification d'une technique de calcul et grâce à l'héritage des deux premières époques de l'évolution des mathématiques, se formèrent les possibilités de construire et réaliser des structures mathématiques, telles que celles dont nous avons montrées l'existence aux points a), b) et c). Ces possibilités des mathématiques modernes marquent le début d'une nouvelle époque dans leur évolution et leur application. Elles assurent aussi les possibilités modernes du modelage mathématique. Le début de cette nouvelle époque ressemble et ressemblera encore longtemps aux débuts des deux autres époques. La mathématique «rafraichit» son objet et ses méthodes en introduisant des «images» des objets de nouveaux modèles, ignorant pour la plupart du temps le fondement formel-logique des modèles mathématiques. On a et on aura encore beaucoup d'importants résultats et de découvertes. Souvent, certains font la conclusion suivante: de cette façon seront épuisées les nouvelles possibilités; elles ne portent pas en elles-mêmes les éléments de la création mathématique.

Indépendamment de ce qu'elles sont en contradiction avec toute évolution historique des mathématiques, qu'elles interprètent d'une façon bornée le processus créateur, ces conclusions aussi sont contraires aux faits déjà formés.

Il a été noté que seulement que, ques modèles dans les différentes sciences peuvent être étudiés à l'aide de l'appareil mathématique existant et des structures mathématiques. C'est ce qui explique la nécéssité du développement d'un nouvel appareil mathématique, de nouvelles structures.

Ainsi, nous arrivons à un appareil mathématique et à des structures mathématiques entièrement neuves. La possibilité d'obtenir des structures, non-isomorphes aux existantes, ouvre des perspectives exceptionnelles devant la création mathématique. En même temps, la plupart des modèles, qu'on étudie dans les différentes sciences, sont des modèles de processus de direction. C'est ainsi que s'accumulent les possibilités d'évolution de la cybernétique dans tous ses aspects.

Il s'est formé un complex de nouvelles sciences mathématiques, représentant lui-même une direction qu'on appelle l'assurance mathématique des machines à calculer.

L'assurance mathématique de la technique de calcul se développe en mathématiques durant la deuxième moitié du 20ème siècle et est à la base d'importantes conquêtes, grâce aux quelles notre époque se distingué nettement.

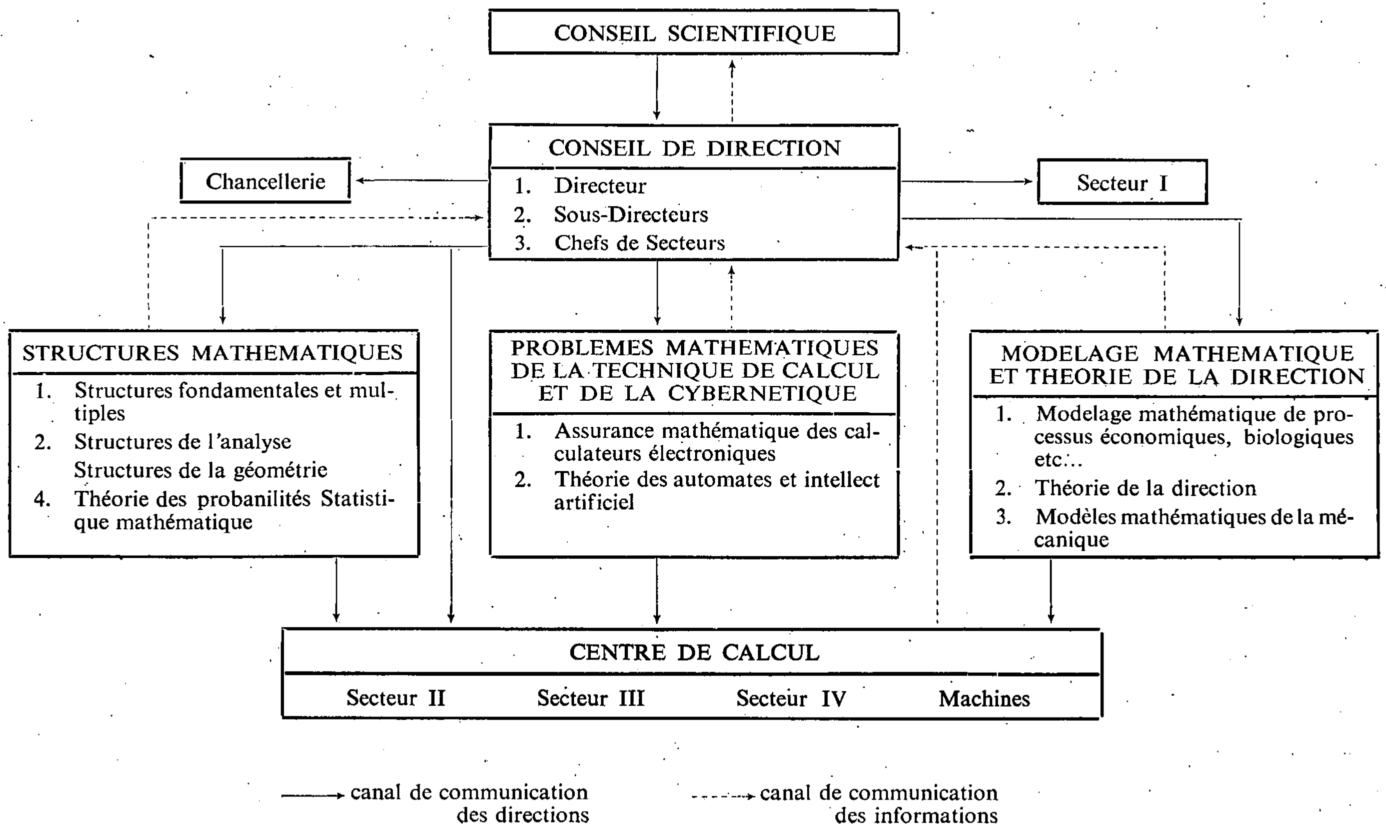
L'évolution de l'assurance mathématique de la technique de calcul est liée étroitement au développement et aux applications de la logique mathématique. Mais, jusqu'a présent, on employait seulement les opérations algébriques sur les éléments logiques. La nature des processus, objets de ces étides, stipule une évolution future de la logique mathématique et en premier lieu l'introduction d'une topologie.

D'autre part, la complexité exceptionnelle des modèles mathématiques modernes des différentes sciences stipule catégoriquement la nécessité de leur traitement au moyen des calculateurs modernes. Cela mène à la nécessité de les exprimer en une langue entièremment différente des langues existantes; l'élément de base de cette nouvelle langue est l'algorythme et son programme. L'éboration d'une nouvelle langue formelle en mathématiques est une des caractéristiques de l'étape actuelle de l'évolution des mathématiques. Il est évident que cette langue devra avoir son appareil mathématique, par exemple son algèbre et sa topologie. Certains* pensent que jusqu'à la fin du 20ème siècle le travail créatif des mathématiciens sera dirigé, en général, vers la construction de l'algèbre et la topologie de cette langue et aussi, naturellement, de la langue elle-même. C'est un des prognostics fondamentaux d'une importance capitale pour les mathématiques. Si nous essayons d'extrapoler et de dépasser le cadre de cette période, nous devions alors affirmer qu'après, viendra la période d'axiomatisation de l'appareil de cette langue à l'aide d'algorythmes fodamentaux «évidents» ou de programmes. Cette période sera alors la période de la conquête de l'«intelligence artificielle».

En dernier lieu, notons que l'élaboration d'une nouvelle langue mathématique et de son appareil a de l'influence sur l'évolution de toutes les branches des mathématiques, de la mathématique en entier. D'autre part, peu à peu, s'accumulera la possibilité d'employer la technique de calcul dans l'évolution de toutes les branches

* Voir V. M. Gluskov. Conférence sur la théorie des automates et de la pensée artificielle. Tachkent, 27—31 mai 1968.

INSTITUT DE MATHEMATIQUES A CENTRE DE CALCUL



STRUCTURE
de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Sofia

Bloc d'étude	Année scolaire	Profil universitaire pour les enseignants	Structures mathématiques	Modelage mathématique	Mécanique mathématique	Qualification à la fin de la $3^{ème}$ et de la $5^{ème}$ année
B	5		Algèbre; Théorie des fonctions rèelles; Analyse complexe; Géomètrie; Probabilités et statistique	Théorie des automates et programmation; Recherche opérationnele		Mathématicien diplomé à profil et à specialisation
B	4		Algèbre; Théorie des fonctions rèelles; Analyse complexe; Géomètrie; Probabilités et statistique	Théorie des automates et programmation; Recherche opérationnele		Mathématicien diplomé à profil et à specialisation
A	3	Quelques différences dans les cours de base				Spécialiste mathématicien; Mathématicien diplomé à profil et à specialisation
A	2	Cours de base sur les directions fondamentales des mathématiques				Spécialiste mathématicien; Mathématicien diplomé à profil et à specialisation
A	1	Cours de base sur les directions fondamentales des mathématiques				Spécialiste mathématicien; Mathématicien diplomé à profil et à specialisation

Centre de Calcul

des mathématiques. Ceci à son tour aura de l'influence sur la mathématique en entier.

Nous venons de toucher l'aspect mathématique de la construction des structures abstraites, l'évolution de la technique de calcul, la cybernétique et le modelage mathématique. A la base de ces phénomènes de la société moderne se trouve la mathématique: leur évolution emploie les résultats et les méthodes des mathématiques, mais, en principe, ils naissent, et leurs problèmes sont à la base de l'évolution d'autres sciences et de la société en entier. Quand un problème, appartenant, par exemple, à une autre science, est posé suffisement clairement, on peut le formuler mathématiquement et obtenir un modèle mathématique. S'il existe une structure mathématique isomorphe à ce modèle, alors le modèle aura les propriétés de la structure — on a une application immédiate des mathématiques dans la science donnée. Si par contre pour un modèle donné, il n'y a pas de structure mathématique isomorphe, alors se pose le problème d'élargir une des structures ou de construire une nouvelle structure mathématique. Ainsi, les problèmes de la science donneé enricissent les structures mathématiques. C'est dans ce sens que les phénomènes tels que, la technique de calcul, la cybernétique et le modelage mathématique, agrandissent le champ des structures mathématiques. Ils forment des directions correspondantes dans lesquelles sont obtenus de nouveaux domaines et méthodes mathématiques et finalemment de nouvelles structures. Ce processus bilatéral d'application des connaissances mathématiques et de leur élargissement dans l'accomplissement de leur application a toujours accompagné l'évolution des mathématiques tout le long de leur histoire jusqu'à nos jours. Dans les différentes époques, le cycle de ses actions s'agrandissant et ne passait, il n'y a pas longtemps, que par la mécanique, la physique et la technique, tandis qu'aujourd'hui il embrasse presque toutes les sciences et les phénomènes actuels de la vie de la société.

Nous donnons sur les schémas annexés la structure actuelle de l'Institut de Mathématiques à Centre de Calcul de l'Académie Bulgare des Sciences et le projet d'évolution ultérieure de la structure de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Sofia. Durant l'élaboration de ces projets ont été retenues et prise en considération les tendances de l'évolution de mathématiques.

A l'avenir, la théorie des probabilités et la statistique mathématique de la première direction et les modèles mathématiques de la mécanique de la troisième direction dans l'Institut de Mathématiques formeront des directions indépendantes dans la structure de l'Institut.

(Reçu le 13. mai 1970)