Quasisequentielle Funktionen

Von G. Wechsung

Die Arbeit stellt einen Beitrag zur Theorie der Wortfunktionen dar. Unter einer Wortfunktion über dem Alphabet X verstehen wir eine eindeutige Abbildung der Wortmenge X^* in sich. Eine Wortfunktion f heißt sequentiell [2], wenn sie die Anfangswortrelation invariant läßt, d. h. wenn gilt

$$\forall u \forall v (u, v \in X^* \land u \subseteqq v \rightarrow f(u) \subseteqq f(v)).$$

Häufig benützen wir die Sprechweise „sequentielle Funktion" für „sequentielle Wortfunktion".

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist eine Beschreibung der Halbgruppe der längentreuen sequentiellen Wortfunktionen über einem Alphabet X durch den projektiven Limes einer projektiven Familie endlicher Halbgruppen ([3]). Eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Zugangs liefert abzählbar viele verschiedene Klassen längentreuer Wortfunktionen, die im allgemeinen nicht mehr retrospektiv sind. Dabei wollen wir eine Wortfunktion f retrospektiv nennen, wenn gilt: Ist $f(x_1 \ldots x_n) = y_1 \ldots y_n$, so ist y_i höchstens von $x_1, \ldots, x_i$ abhängig (für jedes $i \leqq n$). Die neuen Funktionen erscheinen als Morphismen einer bestimmten Funktorkategorie und sollen wegen starker Analogien zu den sequentiellen Funktionen, die im 2. Abschnitt ausgeführt werden, quasisequentiell genannt werden. Unter diesen spielen die Klassen der sogenannten t-sequentiellen Funktionen eine Sonderrolle, weil sie bezüglich der Substitution Halbgruppen bilden, die zur Halbgruppe der sequentiellen Funktionen isomorph sind. Hinsichtlich des Berechnungsverhaltens unterscheiden sich die quasisequentiellen Funktionen jedoch von den sequentiellen. Dies zeigt insbesondere der Satz 6, der den Grad der Nichtretrospektivität der quasisequentiellen Funktionen genau beschreibt. Eine ausführliche Untersuchung der Berechnung quasisequentieller Funktionen und der dazu nötigen Automatentypen soll in einer weiteren Arbeit erfolgen. Der 3. Abschnitt ist den gegenseitigen Beziehungen verschiedener Klassen quasisequentieller Funktionen gewidmet. Die von der Menge aller quasisequentiellen Funktionen erzeugte Halbgruppe Q der sogenannten quasisequentiellen Funktionen im weiteren Sinne erweist sich als freies Produkt der Halbgruppe der sequentiellen Funktionen und einer Gruppe P von gewissen Wortpermutationen.

Bezeichnungen

Nz = Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der 0); X ist ein endliches Alphabet; $|w|$ ist die Länge des Wortes w; $\subseteqq$ ist die Anfangswortrelation $(u \subseteqq v =_{\mathrm{Def}} \exists w(uw = v))$; e ist das leere Wort;

$$X^n = \{w : w = x_1 \ldots x_n \wedge x_1, \ldots, x_n \in X\}; \quad X^0 = \{e\};$$

$$X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n;$$

id ist die identische Abbildung von Nz auf sich bzw. von X^* auf sich (Verwechslungen kommen nicht vor);

$$f \circ g(x) = g(f(x))$$

$\mathfrak{F} = \{t$: t allgemein rekursive Funktion von Nz in $Nz \wedge \forall n(n \in Nz \rightarrow 1 \leqq t(n) \leqq n)\}$.

1. Quasisequentielle Funktionen

Wir verwenden den Begriff des projektiven (inversen) Limes einer projektiven Familie (vgl. [1]).

Def. 1. $H = [\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}, \{\alpha_\lambda^\mu : \lambda, \mu \in \Lambda \wedge \mu \geqq \lambda\}]$ heißt projektive Mengenfamilie $=_{\mathrm{Def}}$

a) Λ ist bezüglich $\leqq$ von unten gerichtete Menge.
b) Jedes H_λ ist eine Menge.
c) α_λ^μ ist eine eindeutige Abbildung von H_μ in H_λ für $\mu \geqq \lambda$, und es gilt: α_μ^μ ist die identische Abbildung von H_μ und

$$\alpha_\lambda^\mu \circ \alpha_\nu^\lambda = \alpha_\nu^\mu.$$

Unter einem Faden versteht man eine Familie $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ mit $x_\lambda \in H_\lambda$ und $\alpha_\lambda^\mu(x_\mu) = x_\lambda$ für $\mu \geqq \lambda$. Die Menge aller Fäden heißt projektiver Limes von H und wird mit $\underleftarrow{\lim}\, H$ bezeichnet. Sind alle H_λ Halbgruppen und alle α_λ^μ Homomorphismen, so spricht man von einer projektiven Halbgruppenfamilie.

Im Falle einer projektiven Halbgruppenfamilie wird der projektive Limes ebenfalls eine Halbgruppe, wenn das Produkt zweier Fäden komponentenweise (durch die jeweilige Halbgruppenmultiplikation) definiert wird.

Um die quasisequentiellen Funktionen definieren zu können, stellen wir einige Hilfsbegriffe bereit.

Def. 2. Für $1 \leqq k \leqq n+1$ definieren wir die Abbildung $(\Pi_k)_n^{n+1}$ von X^{n+1} auf X^n durch

$$(\Pi_k)_n^{n+1}(x_1 \ldots x_{n+1}) =_{\mathrm{Def}} x_1 \ldots x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_{n+1}.$$

Aus Bequemlichkeitsgründen lassen wir manchmal die Indizes n und $n+1$ weg.

Def. 3

1. Es sei $t \in \mathfrak{F}$. Mit F_t bezeichnen wir die projektive Mengenfamilie $[\{X^n : n \in Nz\}, \{(\alpha_t)_n^m : m, n \in Nz \wedge m \geqq n\}]$ mit $(\alpha_t)_n^m =_{\mathrm{Def}} (\Pi_{t(m)})_{m-1}^m \circ \cdots \circ (\Pi_{t(n+1)})_n^{n+1}$, $(\alpha_t)_m^m = \mathrm{id}$.

2. $\mathscr{F}$ sei die Kategorie mit der Objektmenge $\{F_t : t \in \mathfrak{T}\}$, deren Morphismen folgendermaßen definiert sind: $(f_0, f_1, \ldots) \in \mathrm{Hom}(F_t, F_{t'}) =_{\mathrm{Def}}$

a) Für jedes $n \in Nz$ ist f_n eine eindeutige Abbildung von X^n in sich.

b) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F_t: \ldots & X^n \arrow[l] \arrow[d, "f_n"] & X^{n+1} \arrow[l, "(\Pi_{t(n+1)})_n^{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \ldots \arrow[l] \\ F_{t'}: \ldots & X^n \arrow[l] & X^{n+1} \arrow[l, "(\Pi_{t'(n+1)})_n^{n+1}"] & \ldots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Bemerkung. $\mathscr{F}$ kann als Funktorkategorie einer geeigneten Kategorie in die Kategorie der Mengen aufgefaßt werden.

Die Morphismen von $\mathscr{F}$ bilden den Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit. Ist $(f_0, f_1, \ldots) \in \mathrm{Hom}(F_t, F_{t'})$, so ist $f =_{\mathrm{Def}} \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ eine eindeutige längentreue Abbildung von X^* in X^*, aus der die Folge $(f_0, f_1, \ldots)$ durch $f_i = p_i(f) =_{\mathrm{Def}} f \cap \cap (X^i \times X^i)$ zurückgewonnen werden kann. Diese Wortfunktionen, die mit den Elementen von $\mathrm{Hom}(F_t, F_{t'})$ identifiziert werden können, sollen $\langle t, t' \rangle$-sequentiell genannt werden. Weiter legen wir folgende Sprechweisen fest.

Def. 4. $S_{tt'} =_{\mathrm{Def}}$ Klasse aller $\langle t, t' \rangle$-sequentiellen Wortfunktionen. Ist $f \in S_{tt'}$, so nennen wir $\langle t, t' \rangle$ den Typ von f. $S_t =_{\mathrm{Def}} S_{tt}$ ist die Klasse der t-sequentiellen (anstatt $\langle t, t \rangle$-sequentiellen) Funktionen. f heißt quasisequentiell $=_{\mathrm{Df}} \exists t \exists t' (t, t' \in \mathfrak{T} \wedge \wedge f \in S_{tt'})$.

Leicht ergibt sich der

Satz 1. Für jedes $t \in \mathfrak{T}$ ist $[S_t, \circ]$ eine Halbgruppe. $[S_{id}, \circ]$ ist die Halbgruppe der längentreuen sequentiellen Funktionen über X.

Beweis. Die erste Behauptung gilt, weil $\mathrm{Hom}(F_t, F_t)$ eine Halbgruppe ist. Die zweite ist aus [3] bekannt. Wir bemerken, daß $[S_t, \circ]$ auch für nichtrekursive t eine Halbgruppe ist. Da wir jedoch nur berechenbare Wortfunktionen betrachten, bleiben solche t unberücksichtigt.

Wir erwähnen nun einen Satz, der entscheidenden Aufschluß über die Struktur der Elemente von $S_{tt'}$ gibt.

Setzt man

$$S_{tt',n} =_{\mathrm{Def}} \{h : \exists f (f \in S_{tt'} \wedge p_n(f) = h)\} \qquad (\subseteq \mathrm{Hom}(X^n, X^n))$$

und

$(\Pi_{tt'})_n^{n+k}(f_{n+k}) =_{\mathrm{Def}} f_n$, falls ein $f \in S_{tt'}$ existiert mit $f_{n+k} = p_{n+k}(f)$ und $f_n = p_n(f)$,

so gilt

Satz 2

1. $\mathfrak{S}_{tt'} =_{\mathrm{Def}} [\{S_{tt',n} : n \in Nz\}, \{(\Pi_{tt'})_n^{n+k} : n, k \in Nz\}]$ ist eine projektive Familie. Im Falle $t = t'$ handelt es sich um eine projektive Familie (endlicher) Halbgruppen.

2. $S_{tt'} = \varprojlim \mathfrak{S}_{tt'}$ (mit $\varprojlim \mathfrak{S}_{tt'}$ bezeichnen wir den projektiven Limes von $\mathfrak{S}_{tt'}$).

Der Beweis wird wie in [3] geführt.

Da offenbar (vgl. das obige Diagramm) $(\Pi_{tt'})^n_{n-1}([u, v])=[\Pi_{t(n)}(u), \Pi_{t'(n)}(v)]$ ist, kann Satz 2 folgendermaßen anschaulich interpretiert werden: Streicht man im Argumentwort $x_1 \dots x_n$ der quasisequentiellen Funktion $f(x_1 \dots x_n)$ den Buchstaben $x_{t(n)}$, so entsteht der zugehörige Funktionswert aus $f(x_1 \dots x_n)$ durch Streichen des $t'(n)$-ten Buchstaben. Damit haben wir bereits eine deutliche Vorstellung von der grundsätzlichen Beschaffenheit der quasisequentiellen Funktionen.

Die Bedeutung von Satz 2 besteht darin, daß das Studium von $S_{tt'}$ auf die Untersuchung der endlichen Mengen $S_{tt',n}$ zurückgeführt wird. In [3] sind für den Fall $t=t'=\mathrm{id}$ algebraische Eigenschaften der endlichen Halbgruppen $S_{id,n}$ auf den projektiven Limes, d.h. auf die Halbgruppe der sequentiellen Funktionen übertragen worden. Nach Satz 4 der vorliegenden Arbeit gelten jene Überlegungen auch für beliebige S_t.

2. Eigenschaften der quasisequentiellen Funktionen

Die quasisequentiellen Funktionen können durch eine Reihe weiterer Eigenschaften charakterisiert werden, die gegenüber der einführenden Definition den Vorzug größerer Anschaulichkeit haben.

Wir setzen $\Pi_t =_{\mathrm{Def}} \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Pi_{t(n)})^n_{n-1}$. Damit können wir die Definition der quasisequentiellen Funktionen in nützlicher Weise umformulieren:

Satz 3. $f \in S_{tt'}$ genau dann, wenn gilt $\Pi_t \circ f = f \circ \Pi_{t'}$.

Beweis. Die genannte Bedingung ist offenbar gleichbedeutend damit, daß die zu f gehörige Folge $(f_0, f_1, \dots)$ zu $\mathrm{Hom}\,(F_t, F_{t'})$ gehört. Das ist aber äquivalent zu $f \in S_{tt'}$.

Als Folgerung aus diesem Satz registrieren wir das

Lemma 1. Ist $f \in S_{tt'}$ und $g \in S_{t't''}$, so ist $f \circ g \in S_{tt''}$.

Beweis. Aus $\Pi_t \circ f = f \circ \Pi_{t'}$ und $\Pi_{t'} \circ g = g \circ \Pi_{t''}$ folgt $\Pi_t \circ f \circ g = f \circ \Pi_{t'} \circ g = f \circ g \circ \Pi_{t''}$. Lemma 1 ergibt sich auch unmittelbar aus

$$\mathrm{Hom}\,(F_t, F_{t'}) \circ \mathrm{Hom}\,(F_{t'}, F_{t''}) = \mathrm{Hom}\,(F_t, F_{t''}).$$

Für das weitere Studium der quasisequentiellen Funktionen sind sogenannte Wortpermutationen von Bedeutung.

Def. 5. Eine Wortfunktion s heißt Wortpermutation $=_{\mathrm{Def}}$ Für jedes n gibt es eine Permutation σ_n von $\{1, \dots, n\}$ mit $\forall n \forall x_1 \dots \forall x_n \big(n \in Nz \wedge x_1, \dots, x_n \in X \to s(x_1 \dots x_n) = x_{\sigma_n(1)} \dots x_{\sigma_n(n)}\big)$. s heißt die zu $\{\sigma_n : n \in Nz\}$ gehörige Wortpermutation.

Lemma 2. In jedem $S_{tt'}$ gibt es genau eine Wortpermutation $s_{tt'}$.

Beweis

1. Eindeutigkeit. Wir zeigen: Sind s und $\bar{s}$ Wortpermutationen in $S_{tt'}$, so gilt $s=\bar{s}$. Dazu beweisen wir $s_n=\bar{s}_n$ $\big(s_n=p_n(s), \bar{s}_n=p_n(\bar{s})\big)$ durch Induktion über n.

a) $s_1=\mathrm{id}_1=\bar{s}_1$.

b) Sei $s_n=\bar{s}_n$. Damit gilt nach Satz 3 für $|w| = n+1$

$$\Pi_{t'(n+1)}\big(s_{n+1}(w)\big) = s_n\big(\Pi_{t(n+1)}(w)\big) = \bar{s}_n\big(\Pi_{t(n+1)}(w)\big) = \Pi_{t'(n+1)}\big(\bar{s}_{n+1}(w)\big). \quad (1)$$

Es sei $s_{n+1}(w)=x_{\sigma_{n+1}(1)}\dots x_{\sigma_{n+1}(n+1)}$ und $\bar{s}_{n+1}(w)=x_{\bar{\sigma}_{n+1}(1)}\dots x_{\bar{\sigma}_{n+1}(n+1)}$. Wegen (1) folgt $\sigma_{n+1}(i)=\bar{\sigma}_{n+1}(i)$ für $i\neq t'(n+1)$. Da σ_{n+1} und $\bar{\sigma}_{n+1}$ Permutationen von $\{1,\dots,n+1\}$ sind, folgt hieraus auch $\sigma_{n+1}(t'(n+1))=\bar{\sigma}_{n+1}(t'(n+1))$, d. h. $s_{n+1}=\bar{s}_{n+1}$.

2. Existenz. Wir setzen

Def. 6. $\sigma_1(1)=_{\mathrm{Def}}1$.

$$\sigma_{n+1}(i)=_{\mathrm{Def}}\begin{cases}\sigma_n(i), & \text{falls } i<t'(n+1)\wedge\sigma_n(i)<t(n+1)\\ 1+\sigma_n(i), & \text{falls } i<t'(n+1)\wedge\sigma_n(i)\geqq t(n+1)\\ \sigma_n(i-1), & \text{falls } i>t'(n+1)\wedge\sigma_n(i-1)<t(n+1)\\ 1+\sigma_n(i-1), & \text{falls } i>t'(n+1)\wedge\sigma_n(i-1)\geqq t(n+1)\\ t(n+1), & \text{falls } i=t'(n+1).\end{cases}$$

Die zugehörige Wortpermutation werde mit $s_{tt'}$ bezeichnet.

Mit Hilfe von Satz 3 zeigen wir, daß $s_{tt'}$ zu $S_{tt'}$ gehört. Denn einerseits gilt nach Definition von σ_{n+1}

$$\Pi_{t'(n+1)}(s_{tt'}(x_1\dots x_{n+1}))=x_{\sigma_{n+1}(1)}\dots x_{\sigma_{n+1}(t'(n+1)-1)}x_{\sigma_{n+1}(t'(n+1)+1)}\dots x_{\sigma_{n+1}(n+1)}$$

$$=x_{\sigma_n(1)+\varepsilon_1}\dots x_{\sigma_n(t'(n+1)-1)+\varepsilon_{t'(n+1)-1}}x_{\sigma_n(t'(n+1))+\varepsilon_{t'(n+1)}}\dots x_{\sigma_n(n)+\varepsilon_n}$$

mit

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1 & \text{falls } \sigma_n(i)\geqq t(n+1)\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Andererseits ist

$$s_{tt'}(\Pi_{t(n+1)}(x_1\dots x_{n+1}))=s_{tt'}(x_1\dots x_{t(n+1)-1}x_{t(n+1)+1}\dots x_{n+1}).$$

Hieraus folgt mit der vorübergehenden Umbenennung

$$y_1=_{\mathrm{Def}}x_1,\ \dots,\ y_{t(n+1)-1}=_{\mathrm{Def}}x_{t(n+1)-1},\ y_{t(n+1)}=_{\mathrm{Def}}x_{t(n+1)+1},\ \dots$$

$$\dots,\ y_n=_{\mathrm{Def}}x_{n+1}=y_{\sigma_n(1)}\dots y_{\sigma_n(n)},$$

woraus sich durch Rückbenennung der y_i unter Benutzung der eben eingeführten ε_i ergibt

$$s_{tt'}(\Pi_{t(n+1)}(x_1\dots x_{n+1}))=x_{\sigma_n(1)+\varepsilon_1}\dots x_{\sigma_n(n)+\varepsilon_n}.$$

Damit haben wir

$$\Pi_{t'(n+1)}(s_{tt'}(x_1\dots x_{n+1}))=s_{tt'}(\Pi_{t(n+1)}(x_1\dots x_{n+1})),$$

also $\Pi_t\circ s_{tt'}=s_{tt'}\circ\Pi_{t'}$ und nach Satz 3 $s_{tt'}\in S_{tt'}$.

Als einfache Folgerung aus der Definition 6 notieren wir

Lemma 3. $s_{tt'}=\mathrm{id}$ genau dann, wenn $t=t'$ ist.

Hieraus ergibt sich

Lemma 4. Es ist $s_{tt'}^{-1}=s_{t't}$.

Beweis. Nach Lemma 1 gehört die Wortpermutation $s_{tt'} \circ s_{t't}$ zu S_t. Demnach ist nach Lemma 3 $s_{tt'} \circ s_{t't} = \mathrm{id}$. Ebenso erhält man $s_{t't} \circ s_{tt'} = \mathrm{id}$, woraus die Behauptung folgt.

Wir sind nun in der Lage, eine zweite Charakterisierung der Funktionen aus $S_{tt'}$ zu beweisen.

Satz 4. $f \in S_{tt'}$ genau dann, wenn es eine sequentielle Funktion φ gibt mit $f = s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt'}$.

Beweis

1. Es sei φ sequentiell. Dann gilt für φ die Beziehung $\Pi_{id} \circ \varphi = \varphi \circ \Pi_{id}$ (nach Satz 1 (zweiter Teil) und Satz 3). Hieraus folgt

$$\Pi_t \circ f = \Pi_t \circ s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt'} = s_{tid} \circ \Pi_{id} \circ \varphi \circ s_{idt'} = s_{tid} \circ \varphi \circ \Pi_{id} \circ s_{idt'} =$$

$$= s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt'} \circ \Pi_{t'} = f \circ \Pi_{t'}.$$

Daher ist $f \in S_{tt'}$ nach Satz 3.

2. Es sei $f \in S_{tt'}$. Wir setzen $\varphi = s_{idt} \circ f \circ s_{t'id}$ und erhalten

$$\Pi_{id} \circ \varphi = \Pi_{id} \circ s_{idt} \circ f \circ s_{t'id} = s_{idt} \circ \Pi_t \circ f \circ s_{t'id} = s_{idt} \circ f \circ \Pi_{t'} \circ s_{t'id} =$$

$$= s_{idt} \circ f \circ s_{t'id} \circ \Pi_{id} = \varphi \circ \Pi_{id}.$$

Daher ist φ sequentiell. Nach Lemma 4 erhalten wir $f = s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt'}$.

Aus Satz 4 ergibt sich erneut, daß jedes S_t eine Halbgruppe bezüglich $\circ$ ist. Darüber hinaus haben wir die

Folgerung. Für beliebiges $t \in \mathfrak{F}$ ist die Halbgruppe $[S_t, \circ]$ isomorph zur Halbgruppe $[S_{id}, \circ]$ der sequentiellen Funktionen.

Denn die Abbildung $\theta(\varphi) =_{\mathrm{Df}} s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt}$ ist offenbar eine eineindeutige, bezüglich $\circ$ relationentreue Abbildung von S_{id} auf S_t.

Damit übertragen sich alle Halbgruppeneigenschaften der sequentiellen Funktionen auf die Halbgruppen S_t.

Um weitere Eigenschaften der quasisequentiellen Funktionen angeben zu können, definieren wir für jedes t eine zweistellige Relation $\subseteqq_t$ auf X^*.

Def. 7. $w_1 \subseteqq_t w_2 =_{\mathrm{Def}} s_{tid}(w_1) \subseteqq s_{tid}(w_2)$.

Lemma 5. $|v| = |u| + 1 \wedge u \subseteqq_t v \leftrightarrow \Pi_t(v) = u$.

Beweis. $|v| = |u| + 1 \wedge u \subseteqq_t v \leftrightarrow |v| = |u| + 1 \wedge s_{tid}(u) \subseteqq s_{tid}(v) \leftrightarrow s_{tid}(u) = \Pi_{id}(s_{tid}(v)) = s_{tid}(\Pi_t(v)) \leftrightarrow u = \Pi_t(v)$.

Damit sind wir in der Lage, die übliche Beschreibung der sequentiellen Funktionen als Homomorphismen der Anfangswortrelation auf die quasisequentiellen Funktionen zu übertragen.

Satz 5. $f \in S_{tt'} \leftrightarrow \forall u \forall v (u \subseteqq_t v \rightarrow f(u) \subseteqq_{t'} f(v))$.

Dieser Satz stellt eigentlich nur eine andere Interpretation der Aussage von Satz 3 dar.

Beweis

1. Es sei $f \in S_{tt'}$. Dann existiert nach Satz 4 eine sequentielle Funktion φ mit

$$s_{tid} \circ \varphi = f \circ s_{t'id}. \tag{2}$$

Sei nun $u \subseteqq_t v$. Nach Definition 7 und wegen der Sequentialität von φ ergibt sich $\varphi(s_{tid}(u)) \subseteqq \varphi(s_{tid}(v))$. Wegen (2) erhalten wir

$$s_{t'id}(f(u)) \subseteqq s_{t'id}(f(v)),$$

woraus sich nach Definition 7

$$f(u) \subseteqq_{t'} f(v)$$

ergibt.

2. f erfülle die Bedingung von Satz 5. Da nach Lemma 5 für jedes $u \in X^*$ die Beziehung $\Pi_t(u) \subseteqq_t u$ gilt, folgt insbesondere $f(\Pi_t(u)) \subseteqq_{t'} f(u)$. Wegen $|f(u)| = |f(\Pi_t(u))| + 1$ folgt wiederum nach Lemma 5 $f(\Pi_t(u)) = \Pi_{t'}(f(u))$. Also ist $\Pi_t \circ f = f \circ \Pi_{t'}$, und nach Satz 3 ist $f \in S_{tt'}$.

Wird φ die Aussage dieses Satzes als Definition verwendet, so können durch Verzicht auf die Längentreue auch nichtlängentreue quasisequentielle Funktionen definiert werden.

Im folgenden Satz geben wir eine explizite Beschreibung der quasisequentiellen Funktionen an. Es seien s_{tid} und $s_{idt'}$ die gemäß Definition 5 zu $\{\sigma_n : n \in Nz\}$ und $\{\sigma'_n : n \in Nz\}$ gehörigen Wortpermutationen. $s_{tt'}$ gehört offenbar zu $\{\tau_n : n \in Nz\}$ mit $\tau_n = \sigma'_n \circ \sigma_n$.

Def. 8. Es sei $w = x_1 \ldots x_n$. Dann setzen wir

$$w_{nj}^{tt'} =_{\text{Def}} x_{\sigma_n(1)} \ldots x_{\sigma_n(\sigma'_n(j)-1)}.$$

Wenn keine Verwechslungen vorkommen können, schreiben wir kürzer $w_{nj} = w_{nj}^{tt'}$.

Satz 6. f gehört genau dann zu $S_{tt'}$, wenn es eine eindeutige Abbildung α von X^* in X^X gibt, die jedem $p \in X^*$ ein $\alpha_p \in X^X$ zuordnet, so daß für alle $n \in Nz$ und alle $w = x_1 \ldots x_n \in X^n$ gilt

$$f(w) = \alpha_{w_{n1}}(x_{\tau_n(1)}) \ldots \alpha_{w_{nn}}(x_{\tau_n(n)}).$$

Beweis

1. Es sei $f \in S_{tt'}$. Nach Satz 4 gibt es ein sequentielles φ mit $\varphi = s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt'}$. Das bedeutet

$$f(w) = s_{idt'}(\varphi(s_{tid}(w))) = s_{idt'}(\varphi(x_{\sigma_n(1)} \ldots x_{\sigma_n(n)})) =$$
$$= s_{idt'}(\varphi(x_{\sigma_n(1)})\varphi_{x_{\sigma_n(1)}}(x_{\sigma_n(2)}) \ldots \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \ldots x_{\sigma_n(n-1)}}(x_{\sigma_n(n)})).$$

Zur Erleichterung der Rechnung führen wir vorübergehend die Abkürzung $y_i = {}_{\text{Def}}\, \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \ldots x_{\sigma_n(i-1)}}(x_{\sigma_n(i)})$ ein. Damit ergibt sich

$$f(w) = s_{idt'}(y_1 \ldots y_n) = y_{\sigma'_n(1)} \ldots y_{\sigma'_n(n)}$$

$$f(w) = \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \ldots x_{\sigma_n(\sigma'_n(1)-1)}}(x_{\sigma_n(\sigma'_n(1))}) \ldots \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \ldots x_{\sigma_n(\sigma'_n(n)-1)}}(x_{\sigma_n(\sigma'_n(n))}) =$$
$$= \varphi_{w_{n1}}(x_{\tau_n(1)}) \ldots \varphi_{w_{nn}}(x_{\tau_n(n)}) \tag{3}$$

mit den in Definition 8 eingeführten w_{nj}. Die im Satz genannte Abbildung α ordnet jedem p den zugehörigen Zustand φ_p zu.

2. f habe eine Darstellung der in Satz 6 angegebenen Form. Damit verfügen wir über eine sequentielle Abbildung α, die durch $\alpha(x_1 \dots x_n) = \alpha_e(x_1)\alpha_{x_1}(x_2) \dots \alpha_{x_1 \dots x_{n-1}}(x_n)$ definiert ist. Die Umkehrung der im ersten Teil des Beweises durchgeführten Rechnung mit α an Stelle von φ liefert

$$f(x_1 \dots x_n) = \alpha_{w_{n1}}(x_{\tau_n(1)}) \dots \alpha_{w_{nn}}(x_{\tau_n(n)}) = s_{idt'}(\alpha(s_{tid}(x_1 \dots x_n))).$$

Daher gilt $f = s_{tid} \circ \alpha \circ s_{idt'}$, und nach Satz 4 ist $f \in S_{tt'}$.

Zur Erläuterung von Satz 6 geben wir ein Beispiel einer $\langle t, t' \rangle$-sequentiellen Funktion an. Die Permutationen σ_n, σ_n', τ_n, durch die wie oben die Wortpermutationen s_{tid}, $s_{idt'}$ und $s_{tt'}$ definiert sind, seien durch Tabellen gegeben, von denen wir die ersten 6 Zeilen angeben wollen:

σ	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	3	1	2			
4	3	1	2	4		
5	4	1	3	5	2	
6	5	2	4	6	3	1

σ'	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	3	1	2			
4	3	1	2	4		
5	3	1	5	2	4	
6	3	1	5	2	4	6

τ	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	2	3	1			
4	2	3	1	4		
5	3	4	2	1	5	
6	4	5	3	2	6	1

In der i-ten Zeile der σ-Tabelle stehen von links nach rechts $\sigma_i(1) \dots \sigma_i(i)$. Ebenso sind die anderen Tabellen zu lesen. φ sei eine sequentielle Funktion, und $f = s_{tid} \circ \varphi \circ s_{idt'}$. Dann ist zum Beispiel

$$f(x_1 x_2 \dots x_6) = \varphi_{x_5 x_2}(x_4)\varphi(x_5)\varphi_{x_5 x_2 x_4 x_6}(x_3) \cdot \varphi_{x_5}(x_2)\varphi_{x_5 x_2 x_4}(x_6)\varphi_{x_5 x_2 x_4 x_6 x_3}(x_1).$$

Die Verwandtschaft zur Sequentialität wird deutlicher bei Betrachtung der Klassen S_{tid}, $S_{idt'}$, S_t (hierbei sind alle σ_n' bzw. σ_n bzw. τ_n die identischen Permutationen).

a) Ist $f \in S_{tid}$, so gilt mit passendem φ

$$f(x_1 \dots x_n) = \varphi(x_{\sigma_n(1)})\varphi_{x_{\sigma_n(1)}}(x_{\sigma_n(2)}) \dots \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \dots x_{\sigma_n(n-1)}}(x_{\sigma_n(n)}).$$

b) Ist $f \in S_{idt}$, so gilt mit passendem φ

$$f(x_1 \dots x_n) = \varphi_{x_1 \dots x_{\sigma_n'(1)-1}}(x_{\sigma_n'(1)}) \dots \varphi_{x_1 \dots x_{\sigma_n'(n)-1}}(x_{\sigma_n'(n)}).$$

c) Ist $f \in S_t$, so gilt mit passendem φ

$$f(x_1 \dots x_n) = \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \dots x_{\sigma_n(\sigma_n'(1)-1)}}(x_1) \dots \varphi_{x_{\sigma_n(1)} \dots x_{\sigma_n(\sigma_n'(n)-1)}}(x_n).$$

3. Beziehungen der Klassen $S_{tt'}$ untereinander

Zunächst beweisen wir den einfachen

Satz 7

1) Jedes $f \in S_{tt'}$ mit allgemein rekursiver zugehöriger sequentieller Funktion φ (vgl. Satz 4) ist allgemein rekursiv.

2) Nicht jede längentreue allgemein rekursive Funktion von X^* in X^* ist quasisequentiell.

Beweis

1. Da mit t und t' auch s_{tid} und $s_{idt'}$ allgemein rekursiv sind, folgt die Behauptung aus Satz 4.

2. Die durch

$$f(x_1 \dots x_{2n}) = x_{2n-1}x_{2n}x_{2n-2} \dots x_2x_1x_3 \dots x_{2n-3}$$

$$f(x_1 \dots x_{2n+1}) = x_{2n+1}x_{2n}x_{2n-2} \dots x_2x_1x_3 \dots x_{2n-3}x_{2n-1}$$

festgelegte Funktion f ist offenbar allgemein rekursiv, aber sie gehört zu keiner Klasse $S_{tt'}$. Denn man prüft leicht folgendes nach: Streicht man einen beliebigen Buchstaben aus dem Wort $x_1x_2x_3x_4x_5$ und wendet man darauf f an, so kann das entsprechende Bildwort nicht aus $f(x_1x_2x_3x_4x_5)$ durch Streichen eines passenden Buchstabens gewonnen werden.

Satz 8. Ist $t_1 \neq t_3$ oder $t_2 \neq t_4$, so gibt es in $S_{t_1t_2}$ Funktionen, die nicht in $S_{t_3t_4}$ liegen.

Beweis

1. Fall. Es sei $t_1 \neq t_3$. Dann gibt es ein n mit $i =_{\mathrm{Def}} t_1(n) \neq t_3(n) =_{\mathrm{Def}} j$. Ferner sei $t_4(n)=k$. s_{t_1id} sei durch $\{\sigma_n^1 : n \in Nz\}$ gegeben. Nach Definition 6 gilt $\sigma_n^1(n)=1$. Aus (3) (im Beweis von Satz 6) folgt hiermit, daß der j-te Buchstabe des Arguments $x_1 \dots x_n$ von f an wenigstens zwei Stellen in das Bildwort eingeht. Daher ist die Angabe einer Funktion $f \in S_{t_1t_2}$ so möglich, daß

$$f(x_1 \dots x_{j-1}x_jx_{j+1} \dots x_n) = y_1 \dots y_l \dots y_n$$

und für $x_j' \neq x_j$

$$f(x_1 \dots x_{j-1}x_j'x_{j+1} \dots x_n) = y_1' \dots y_l' \dots y_n'$$

gilt, wobei $y_l \neq y_l'$ wenigstens für ein $l \neq k$ vorkommt. Dieses f gehört nicht zu $S_{t_3t_4}$, weil sonst einerseits

$$f(x_1 \dots x_{j-1}x_{j+1} \dots x_n) = \Pi_k(y_1 \dots y_l \dots y_n)$$

andererseits aber

$$f(x_1 \dots x_{j-1}x_{j+1} \dots x_n) = \Pi_k(y_1' \dots y_l' \dots y_n')$$

wäre, was wegen $\Pi_k(y_1 \dots y_l \dots y_n) \neq \Pi_k(y_1' \dots y_l' \dots y_n')$ unmöglich ist.

2. Fall. Es sei $t_2 \neq t_4$. Dann gibt es ein n mit $m =_{\mathrm{Def}} t_2(n) \neq t_4(n) =_{\mathrm{Def}} k$. Wir Betrachten nur den Fall $m < k \wedge i = t_1(n) \leqq j = t_3(n)$. Die anderen Fälle lassen sich analog behandeln. Es sei $w = x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n$ mit $x_i = x_{i+1} = \dots = x_j$, so daß $\Pi_i(w) = \Pi_j(w)$. Die Funktion $f \in S_{t_1t_2}$ wird so gewählt, daß

$$f(w) = y_1 \dots y_m y_{m+1} \dots y_n \quad \text{mit} \quad y_m \neq y_{m+1}$$

gilt. Dies läßt sich erreichen, denn nach Satz 6 ist

$$y_m = \alpha_{w_{nm}}(\tau_n(m)),\ y_{m+1} = \alpha_{w_{n,m+1}}(\tau_n(m+1))$$

und

$$w_{nm} \neq w_{n,m+1}.$$

Wäre $f \in S_{t_3t_4}$, so müßte $\Pi_{t_3} \circ f = f \circ \Pi_{t_4}$ gelten, d.h.

$$f(\Pi_{t_3}(w)) = y_1 \dots y_m y_{m+1} \dots y_{k-1}y_{k+1} \dots y_n.$$

Wegen $f \in S_{t_1 t_2}$ haben wir

$$f(\Pi_{t_1}(w)) = \Pi_{t_2}(f(w)) = y_1 \dots y_{m-1} y_m \dots y_n,$$

und aus

$$\Pi_{t_3}(w) = \Pi_j(w) = \Pi_i(w) = \Pi_{t_1}(w)$$

folgte $f(\Pi_{t_3}(w)) = f(\Pi_{t_1}(w))$, was wegen $y_m \neq y_{m+1}$ unmöglich ist.

Folgerung 1. Jede Klasse $S_{tt'}$ mit $t \neq \mathrm{id}$ oder $t' \neq \mathrm{id}$ enthält nichtsequentielle Funktionen.

Beweis. Man wende Satz 8 für $t_3 = t_4 = \mathrm{id}$ an.

Folgerung 2. Für $t_1 \neq t_3$ oder $t_2 \neq t_4$ ist niemals $S_{t_1 t_2} \subseteq S_{t_3 t_4}$.
Aus Satz 6 ergibt sich leicht der

Satz 9. Jede Klasse S_t enthält alle Homomorphismen, (d.h. alle sequentiellen Funktionen vom Gewicht 1).

Beweis. Jeder Homomorphismus kann gemäß Satz 6 bei beliebigem t mit Hilfe einer konstanten Abbildung α realisiert werden.

Wir untersuchen jetzt $S_{t_1} \cap S_{t_2}$ für $t_1 \neq t_2$. Es sei $f \in S_{t_1} \cap S_{t_2}$. Nach Satz 6 sind dann zwei verschiedene Darstellungen für f möglich:

$$f(x_1 \dots x_n) = \alpha_{w^1_{n1}}(x_1) \dots \alpha_{w^1_{nn}}(x_n),$$

$$f(x_1 \dots x_n) = \bar{\alpha}_{w^2_{n1}}(x_1) \dots \bar{\alpha}_{w^2_{nn}}(x_n).$$

Dabei sind die w^1_{ni} bzw. w^2_{ni} die nach Definition 8 zu t_1 bzw. t_2 gehörigen Wörter.

Hieraus ergibt sich als notwendige Bedingung für $f \in S_{t_1} \cap S_{t_2}$: $\alpha_{w^1_{ni}} = \bar{\alpha}_{w^2_{ni}}$ für $i = 1, \dots, n$. Um eine notwendige und hinreichende Bedingung zu erhalten, definieren wir

$$p \sim_{t_1 t_2} q =_{\mathrm{Def}} \exists v \exists w \exists n \exists m \exists j \exists k (p = w^1_{nj} \wedge q = v^1_{mk} \wedge w^2_{nj} = v^2_{mk}).$$

$\approx_{t_1 t_2}$ sei die transitive Hülle von $\sim_{t_1 t_2}$.

Ist f gemäß Satz 6 durch α dargestellt, so setzen wir

$$p \equiv_\alpha q =_{\mathrm{Def}} \alpha_p = \alpha_q.$$

Dann gilt offenbar der

Satz 10. $f \in S_{t_1}$ gehört genau dann zu S_{t_2}, wenn gilt $\forall p \forall q (p \approx_{t_1 t_2} q \to p \equiv_\alpha q)$, d.h., wenn $\equiv_\alpha$ eine Vergröberung der transitiven Hülle von $\sim_{t_1 t_2}$ ist.

Man prüft auf Grund dieses Satzes leicht nach, daß beispielweise $S_1 \cap S_{id} =$ $=$ Menge aller Homomorphismen ist. Dabei ist 1 die konstante Funktion 1. Dasselbe ergibt sich für $S_t \cap S_{id}$ mit

$$t(n) =_{\mathrm{Def}} \begin{cases} n-1 & \text{für } n > 1, \\ 1 & n = 1. \end{cases}$$

Bisher ist die Menge der quasisequentiellen Funktionen als Kategorie betrachtet worden. Wir stellen nun die Frage nach der durch diese Menge erzeugten Halbgruppe $[Q, \circ]$. Die Elemente von Q nennen wir quasisequentielle Funktionen im weiteren Sinne. Q enthält nämlich mehr als die quasisequentiellen Funktionen. Um dies einzusehen, betrachten wir noch einmal die Funktion f aus dem zweiten Teil des Beweises von Satz 7. f ist das Produkt zweier quasisequentieller Funktionen g und h, die folgendermaßen definiert sind

$$g(x_1 \dots x_{2n}) = x_{2n} \dots x_4 x_2 x_1 x_3 \dots x_{2n-1}$$

$$g(x_1 \dots x_{2n+1}) = x_{2n} \dots x_4 x_2 x_1 x_3 \dots x_{2n-1} x_{2n+1}$$

und

$$h(x_1 \dots x_n) = x_n x_1 \dots x_{n-1}.$$

$$g \in S_{idt_1} \text{ mit } t_1(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n \equiv 0(2), \\ n, & \text{falls} \quad n \equiv 1(2). \end{cases}$$

Ist t_2 eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}$ mit $\forall n(n > 1 \to t_2(n) < n)$ und $t_3 = t_2 + 1$, so ist $h \in S_{t_2 t_3}$. Demnach ist $f = g \circ h$ quasisequentiell im weiteren Sinne. f ist jedoch nicht quasisequentiell, wie aus dem Beweis von Satz 7 bekannt ist.

Es sei P die Gruppe der Wortpermutationen, die von $\{s_{tid} : t \in \mathfrak{F}\}$ erzeugt wird. Bezeichnet $*$ die Bildung des freien Produkts, so gilt trivialerweise der

Satz 11. $Q = S_{id} * P$.

Damit ist das Studium der quasisequentiellen Funktionen im weiteren Sinne im wesentlichen auf die Untersuchung der Wortpermutationen zurückgeführt. Diese lassen sich indessen nicht durch einfache Eigenschaften charakterisieren.

Квазипоследовательностные функции

Обобщается определение последовательностных функции как проективный предел проективного семейства конечных полугрупп. Возникают таким образом новые классы так называемых квазипоследовательностных функции разных типов. Исследуются свойства этих функции и их соотношения к последовательностным функциям.

SEKTION MATHEMATIK
FRIEDRICH SCHILLER UNIVERSITÄT
69 JENA, DDR
UNIVERSITÄTS HOCHHAUS

Literatur

[1] Bourbaki, N., *Théorie des ensembles*, Chapitre III, Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers, Hermann, Paris, 1956.
[2] Raney, G. N., Sequential functions, *J. Assoc. Comput. Mach.* v. 5, 1958, pp. 177—180.
[3] Wechsung, G., Die Gruppe der längentreuen eindeutigen sequentiellen Funktionen über festem Alphabet, *Elektron. Datenverarbeit. Kybernetik*, v. 8, 1972, pp. 335—352.

(Eingegangen am 11. April 1972)