# Eine verbandstheoretische Klassifikation der längentreuen Wortfunktionen

Von G. WECHSUNG

Feststehende Bezeichnungen: $Nz$ = Menge der natürlichen Zahlen; $f \circ g(x) = g(f(x))$; $X^*$ = Menge aller Wörter über dem Alphabet $X$ einschließlich des leeren Wortes $e$; $|w|$ = Länge des Wortes $w$; $\mathfrak{P}(M) = \{U : U \subseteq M\}$ — die Potenzmenge von $M$.

## 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist dem Studium algebraischer Eigenschaften von Klassen längentreuer Wortfunktionen über festem Alphabet $X$ gewidmet. Dabei sollen vorerst keine Berechenbarkeitsforderungen gestellt werden. Die Einschränkung auf Längentreue, die bei allen betrachteten Funktionen auch ohne ausdrückliche Erwähnung stets gelten soll, ermöglicht eine deutlichere Beschreibung der Abhängigkeit der Buchstaben der Bildwörter von den Buchstaben der Originalwörter. Die Unterscheidung verschiedener Arten eines solchen Abhängigkeitsverhaltens führt zur Einteilung der Wortfunktionen in Klassen von Funktionen gleichen Typs. Dies wird präzisiert durch die

*Definition 1.*

1. Eine eindeutige Abbildung aus $Nz^2$ in $\mathfrak{P}(Nz)$ heißt Typ $=_{\mathrm{Def}}$

a) $\forall n \forall m (m \leqq n \rightarrow T(n, m) \subseteq \{1, \ldots, n\})$,

b) $T(n, m)$ ist nicht definiert für $n < m$.

An Stelle von T(n,m) wollen wir künftig auch $T_n(m)$ schreiben.

2. Ist $T$ Typ, $w = x_1 \ldots x_n \in X^*$ und $T_n(m) = \{i_1, \ldots, i_s\}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$, so setzen wir

$$w_m^T =_{\mathrm{Def}} x_{i_1} \ldots x_{i_s}.$$

Werden nicht mehrere $T$ gleichzeitig betrachtet, so schreiben wir einfacher $w_m$.

3. Die Wortfunktion $f$ heißt vom Typ $T$ (wir schreiben dafür kurz $f \tau T$) $=_{\mathrm{Def}}$ Für jedes $n \in Nz$ existieren eindeutige Abbildungen $f_{n1}, \ldots, f_{nn}$ von $X^*$ in $X$, so daß gilt

$$\forall w \forall n \big(w \in X^* \wedge |w| = n \rightarrow f(w) = f_{n1}(w_1^T) \ldots f_{nn}(w_n^T)\big).$$

4. $W =_{\mathrm{Def}}$ Menge aller (längentreuen) Wortfunktionen über $X$, $A =_{\mathrm{Def}}$ Menge aller Typen, $F_T =_{\mathrm{Def}} \{f : f \in W \wedge f \tau T\}$ für $T \in A$, $\mathfrak{K} =_{\mathrm{Def}} \{F_T : T \in A\}$.

$T_n(m)$ interpretieren wir als die Menge derjenigen Stellen des Originalworts der Länge $n$, von denen der $m$-te Buchstabe des Bildworts abhängt.

Für $T_n(m)=\{1, \ldots, n\}$ entstehen genau die sequentiellen Funktionen. Die nichtretrospektiven Wortfunktionen $f$ sind diejenigen, zu denen ein $n$ und ein $m$ existieren mit $m<n$ und $(T_f)_n(m) \cap \{m+1, \ldots, n\} \neq \emptyset$, wobei $T_f$ in Satz 1b erklärt wird. Bei diesen Funktionen hängt nicht für jedes Wort der $m$-te Buchstabe des Bildworts nur von den ersten $m$ Buchstaben des Originalworts ab. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Funktion

$$f(x_1 \ldots x_n)=x_2 \ldots x_n x_1,$$

für die ein Typ $T$ durch

$$T_n(m) = \begin{cases} \{m, m+1\} & \text{für} \quad m<n, \\ \{1, m\} & \text{für} \quad m=n, \end{cases}$$

gegeben ist. Dabei ist

$$f_{nm}(xy) = \begin{cases} y & \text{für} \quad m<n, \\ x & \text{für} \quad m=n, \quad x, y \in X. \end{cases}$$

Es zeigt sich, daß die Menge $A$ der Typen in natürlicher Weise zu einem vollständigen atomaren Booleschen (und damit totaldistributiven) Verband gemacht werden kann, der isomorph zu einem Verband mit der Trägermenge $\mathfrak{R}$ und damit zu einem Teilbund des Potenzmengenverbandes von $W$ ist. Dieser Teilbund ist insofern ausgezeichnet, als er aus allen und nur den Mengen besteht, die bezüglich eines Hüllenoperators abgeschlossen sind, der von der zur Relation $\tau$ gehörigen Galoisverbindung abgeleitet ist (Abschnitt 2). Der 3. Abschnitt führt zu der Feststellung, daß $F_T$ dann und nur dann eine Halbgruppe bezüglich der Substitution bildet, wenn jedes $T_n$ ein abgeschlossener Operator ist (vgl. Definition 4). Insbesondere gehören dazu diejenigen sogenannten topologischen Typen, bei denen jedes $T_n$ ein topologischer Hüllenoperator ist.

## 2. Der Verband der Typen

Jede längentreue Wortfunktion $f$ kann in der in Definition 1 angegebenen Weise dargestellt werden. Dazu setze man $T_n(m)=\{1, \ldots, n\}$ für jedes $n$ und jedes $m \leqq n$ und $f_{nm}(x_1 \ldots x_n)=m$-ter Buchstabe von $f(x_1 \ldots x_n)$. $W$ kann daher als $F_T$ mit dem eben angegebenen Typ $T$ angesehen werden.

*Definition 2.* Für $T, S \in A$ definieren wir $T \cap S$, $T \cup S$, $\overline{T}$ durch

$$(T \cap S)_n(m) = T_n(m) \cap S_n(m),$$
$$(T \cup S)_n(m) = T_n(m) \cup S_n(m),$$
$$(\overline{T})_n(m) = \{1, \ldots, n\} \setminus T_n(m).$$

Unmittelbar klar ist damit die

*Folgerung.* $[A, \cap, \cup, {}^-]$ ist ein vollständiger atomarer Boolescher Verband. Die zugehörige Halbordnung ist durch

$$T \leqq S =_{\text{Def}} \forall n \forall m (m \leqq n \rightarrow T_n(m) \subseteqq S_n(m))$$

gegeben. Die Atome von $A$ sind diejenigen $T^{ijk}$ mit

$$T_n^{ijk}(m) = \begin{cases} \{k\} & \text{für} \quad n = i \wedge j = m, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daß der Typ einer gegebenen Wortfunktion nicht eindeutig bestimmt ist, zeigt der triviale

*Satz 1a.* Ist $f \in F_T$ und ist $T \leqq S$, so ist auch $f \in F_S$.
Dieser Satz kann jedoch ergänzt werden durch

*Satz 1b.* Zu jeder Wortfunktion $f \in W$ gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Typ $T_f$ in $A$.

*Beweis.* $T_f$ ist das Infimum aller Typen von $f$.
Satz 1a kann wesentlich verschärft werden zu dem

*Satz 2.* $\mathfrak{K}$ ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion $\subseteqq$ ein zu $[A, \leqq]$ isomorpher Verband.

*Beweis*

1. Die Zuordnung $T \to F_T$ ist eineindeutig. Es sei nämlich $T \neq S$. Dann gibt es ein $n$ und ein $m$ mit $T_n(m) \neq S_n(m)$. O. B. d. A. existiert daher ein $j$ mit $j \in S_n(m)$, aber $j \notin T_n(m)$. Damit gibt es eine Funktion $f \in F_S$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$ mit der Eigenschaft $f(x_1 \ldots x_j \ldots x_n) = y_1 \ldots y_m \ldots y_n$, und $y_m$ hängt echt von $x_j$ ab, d.h. $y_m$ ändert sich, wenn sich $x_j$ bei sonst gleichbleibenden $x_i$ $(i \neq j)$ ändert. Keine Funktion aus $F_T$ dagegen darf wegen $j \notin T_n(m)$ dieses Verhalten aufweisen. Also ist $F_T \neq F_S$.
2. Die Aussage $T \leqq S \to F_T \subseteqq F_S$ ist genau Satz 1a.
3. Wir zeigen noch: $F_T \subseteqq F_S \to T \leqq S$. Es sei $F_T \subseteqq F_S$. Für jedes $n$ und $m \leqq n$ gibt es ein $f \in F_T$, so daß, wenn $f(x_1 \ldots x_n) = y_1 \ldots y_n$ gilt, $y_m$ von allen $x_i$ mit $i \in T_n(m)$ wirklich abhängt. Da $f$ nach Voraussetzung zu $F_S$ gehört, muß $S_n(m) \supseteqq T_n(m)$ sein. Also gilt $T \geqq S$, womit die behauptete Isomorphie bewiesen ist (vgl. [2]).

*Bemerkungen*

1. Den Verband $[A, \cap, \cup, ^-]$ nennen wir den Typenverband. Wegen Satz 2 wollen wir diese Bezeichnung auf $[\mathfrak{K}, \subseteqq]$ übertragen und die Klassen $F_T$ gelegentlich als Typen ansprechen.
2. Das kleinste Element von $\mathfrak{K}$ ist der Typ der Konstanten, das größte ist die Klasse $W$ (siehe den Beginn dieses Abschnitts).
3. Man überzeugt sich leicht davon, daß die Infimumbildung in $\mathfrak{K}$ die gewöhnliche Durchschnittsbildung ist. Damit ergibt sich für $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{K}$ ([2])

$$\sup \mathfrak{M} = \bigcap \{F : F \in \mathfrak{K} \wedge \forall C (C \in \mathfrak{M} \to C \subseteqq F)\},$$

insbesondere

$$\sup (F_T, F_S) = \bigcap \{F_{T'} : F_{T'} \supseteqq F_T \cup F_S\}.$$

$\mathfrak{K}$ ist ein Teilbund des Potenzmengenverbandes von $W$, dessen Bedeutung noch deutlicher wird, wenn man die zu der Relation $\tau$ gehörige Galoisverbindung und die zugehörigen Hüllenoperatoren betrachtet.

*Definition 3.* Für $B \subseteq A$ und $U \subseteq W$ setzen wir

$$\gamma(B) =_{\mathrm{Def}} \{f : f \in W \wedge \forall T(T \in B \to f \tau T)\},$$
$$\delta(U) =_{\mathrm{Def}} \{T : T \in A \wedge \forall f(f \in U \to f \tau T)\},$$
$$\Gamma =_{\mathrm{Def}} \delta \circ \gamma, \quad \Delta =_{\mathrm{Def}} \gamma \circ \delta.$$

$[\mathfrak{P}(A), \mathfrak{P}(W), \gamma, \delta]$ ist eine Galoisverbindung, $\Gamma$ und $\Delta$ sind Hüllenoperatoren, die bezüglich $\Gamma$ und $\Delta$ abgeschlossenen Mengen bilden je einen vollständigen Verband, und beide Verbände sind zueinander dual isomorph (vgl. [1], [2]). Wir wollen diese Verbände genauer beschreiben. Dazu stellen wir zunächst fest

$$\gamma(B) = F_{\inf B}, \delta(U) = \{T : T \geqq \bigcup_{f \in U} T_f\},$$

wobei $T_f$ wie in Satz 1b verstanden wird. Damit ergibt sich

$$\Gamma(U) = F_{\bigcup\limits_{f \in U} T_f}, \quad \Delta(B) = \{T : T \geqq \inf B\}.$$

Weil $\bigcup\limits_{f \in U} T_f$ alle Elemente von $A$ annehmen kann, sind die $\Gamma$-abgeschlossenen Mengen genau die oben eingeführten Typen $F_T$, und der Verband $[\mathfrak{K}, \subseteq]$ erscheint somit als Verband der $\Gamma$-abgeschlossenen Mengen für den von der Galoisverbindung erzeugten Hüllenoperator $\Gamma$. Ordnet man jeder $\Delta$-abgeschlossenen Menge ihr Infimum zu, so erhält man einen dualen Isomorphismus vom Verband der $\Delta$-abgeschlossenen Teilmengen von $A$ auf den Verband $[A, \leqq]$.

## 3. Halbgruppen

Es erhebt sich die Frage, wann mit $f$ und $g$ stets auch $f \circ g$ vom Typ $T$ ist. Um die Antwort besser formulieren zu können, fassen wir $T_n$ als Operator auf $\{1, \ldots, n\}$ auf

*Definition 4.* $T_n(\emptyset) = \emptyset$, $T_n(\{i_1, \ldots, i_k\}) = T_n(i_1) \cup \ldots \cup T_n(i_k)$.
$T_n$ heißt einbettend $=_{\mathrm{Def}}$, $\forall M(M \subseteq \{1, \ldots, n\} \to M \subseteq T_n(M))$,
$T_n$ heißt abgeschlossen $=_{\mathrm{Def}}$, $\forall M(M \subseteq \{1, \ldots, n\} \to T_n(T_n(M)) \subseteq T_n(M))$.
Dann kann der folgende Satz ausgesprochen werden.

*Satz 3.* Die Klasse $F_T$ ist genau dann eine Halbgruppe bezüglich $\circ$, wenn für jedes $n$ der Operator $T_n$ abgeschlossen ist.

*Beweis*

1. Es seien $f, g \in F_T$, und $T$ erfülle die Bedingung des Satzes. Dann ist

$$g(f(x_1 \ldots x_n)) = g(f_{n1}(w_1) \ldots f_{nn}(w_n)) = y_1 \ldots y_n.$$

Hierbei hängt $y_m$ höchstens von den $f_{nj}(w_j)$ mit $j \in T_n(m)$ ab. Diese $f_{nj}(w_j)$ hängen höchstens von den $x_k$ mit $k \in T_n(j)$ ab. Insgesamt hängt $y_m$ daher höchstens von den $x_k$ mit

$$k \in \bigcup_{j \in T_n(m)} T_n(j) = T_n(T_n(m)) = T_n(m)$$

ab. Damit ist $f \circ g \in F_T$.

2. Es sei $[F_T, \circ]$ Halbgruppe und $T_n(T_n(m)) \not\subseteq T_n(m)$. Dann gibt es ein $j \in T_n(T_n(m))$ mit $j \notin T_n(m)$. Dazu gibt es ein $i \in T_n(m)$ mit $j \in T_n(i)$. Werden $T_n(i)$

(bzw. $T_n(m)$) der Größe nach aufgezählt, so seien $j$ (bzw. $i$) das $s$-te (bzw. $r$-te) Element. Wir wählen jetzt zwei Funktionen $f, g \in F_T$ mit den Eigenschaften

$$f_{ni}(w_i) = s\text{-ter Buchstabe von } w_i = x_j,$$

$$y_m = g_{nm}((f(x_1 \dots x_n))_n) = r\text{-ter Buchstabe von } (f(x_1 \dots x_n))_m = f_{ni}(w_i) = x_j.$$

(Die Bezeichnungen stimmen dabei mit denen von Punkt 1 dieses Beweises überein.) Also hängt $y_m$ echt von $x_j$ ab. Das ist aber nicht möglich, weil nach Voraussetzung $f \circ g \in F_T$ ist und daher $j \in T_n(m)$ sein müßte, was der obigen Annahme widerspricht. Infolgedessen ist für jedes $n$ und $m \leqq n$ $T_n(T_n(m)) \subseteq T_n(m)$, womit die zu beweisende Eigenschaft von $T_n$ aus Definition 4 folgt.

*Definition 5.* $T$ (bzw. $F_T$) heißt abgeschlossen (topologisch) $=_{\mathrm{Def}}$ Für jedes $n$ ist der in Definition 4 erklärte Operator $T_n$ ein abgeschlossener Operator (topologischer Hüllenoperator).

*Satz 4.* Die Menge $\mathfrak{H}$ aller Halbgruppen $F_T$ bildet einen vollständigen Teilbund (keinen Teilverband) von $[\mathfrak{K}, \subseteq]$. Die Menge $H$ aller abgeschlossenen Typen bildet einen vollständigen Teilbund (keinen Teilverband) von $[A, \leqq]$.

*Beweis.* Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{H}$, so gehört wegen der Vollständigkeit von $[\mathfrak{K}, \subseteq] F =_{\mathrm{Def}} \bigcap \mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{K}$. Da $F$ als Durchschnitt von Halbgruppen auch eine Halbgruppe ist, gehört $F$ zu $\mathfrak{H}$. Daraus ergibt sich, daß die abgeschlossenen Klassen einen vollständigen Teilbund von $\mathfrak{K}$ bilden. Es handelt sich dabei nicht um einen Teilverband von $\mathfrak{K}$, weil mit zwei abgeschlossenen Typen ihre Vereinigung nicht notwendig abgeschlossen ist, was wir durch folgendes Beispiel zeigen. Wir setzen

$$T_3(1) = \{1\}, \quad T_3(2) = \{2, 3\}, \quad T_3(3) = \{2, 3\},$$

$$S_3(1) = \{1\}, \quad S_3(2) = \{2\}, \quad S_3(3) = \{1, 3\},$$

und wählen $T$ und $S$ ansonsten so, daß auch für $n \neq 3$ die Operatoren $T_n$ und $S_n$ abgeschlossen sind. $T \cup S$ ist nicht abgeschlossen, weil

$$(T \cup S)_3((T \cup S)_3(2)) = \{1, 2, 3\} \nsubseteq (T \cup S)_3(2) = \{2, 3\}.$$

*Bemerkung.* Die beiden Aussagen von Satz 4 sind wegen Satz 2 völlig gleichwertig. Dieser Satz rechtfertigt auch die zur Vereinfachung des Beweises angewendete Methode, einen Teil der Behauptung (vollständiger Teilbund zu sein) in $\mathfrak{K}$ zu zeigen und den Rest (kein Teilverband zu sein) in $A$ durchzuführen. Ähnlich verfahren wir beim Beweis des nächsten Satzes.

*Satz 5.* Die Menge $\mathfrak{T}$ der topologischen Typen $F_T$ bildet einen vollständigen Teilverband von $\mathfrak{H}$. Die Menge $\mathrm{Top} \subseteq A$ aller topologischen Typen bildet einen vollständigen Teilverband von $H$.

*Beweis*

1. Für beliebige $M \subseteq \mathrm{Top}$ ist $\bigcap M \in \mathrm{Top}$. Denn nach Satz 4 ist $\bigcap M$ abgeschlossen, und daß $\bigcap M$ wieder einbettend ist, ist offenkundig. Daher ist $\bigcap M \in \mathrm{Top}$ und Top ein vollständiger Verband.

2. Wir zeigen noch. Ist $M \subseteqq \mathrm{Top}$, so ist $\inf_H M = \inf_{\mathrm{Top}} M$ und $\sup_H M = \sup_{\mathrm{Top}} M$. Trivialerweise ist $\inf_H M = \inf_{\mathrm{Top}} M = \bigcap M$. Dagegen ist

$$\sup_H M = \bigcap \{T : T \in H \wedge \forall S(S \in M \rightarrow S \leqq T)\},$$

$$\sup_{\mathrm{Top}} M = \bigcap \{T : T \in \mathrm{Top} \wedge \forall S(S \in M \rightarrow S \leqq T)\}.$$

Wegen $\mathrm{Top} \subseteqq H$ ist immer $\sup_H M \leqq \sup_{\mathrm{Top}} M$. Ist $M \subseteqq \mathrm{Top}$, so ist darüber hinaus jedes Element $T$, das bei der Durchschnittsbildung von $\sup_H M$ vorkommt, abgeschlossen (wegen $T \in H$) und notwendig einbettend (weil ein nicht einbettendes $T$ kein einbettendes $S$ majorisieren kann), also topologisch und kommt daher auch bei der Durchschnittsbildung von $\sup_{\mathrm{Top}} M$ vor. Daraus folgt $\sup_{\mathrm{Top}} M \leqq \sup_H M$, also $\sup_{\mathrm{Top}} M = \sup_H M$ für jedes $M \subseteqq \mathrm{Top}$.

*Folgerung.* Zu jeder Klasse $F_T$ gibt es eine kleinste sie umfassende abgeschlossene Klasse $\theta(F_T)$ und eine kleinste sie umfassende topologische Klasse $\theta^*(F_T)$. Dasselbe gilt für die Typen aus $A$.

*Beweis.* $\theta(F_T)$ ist der Durchschnitt aller $F_T$ umfassenden Halbgruppen $F_S$, $\theta^*(F_T)$ ist der Durchschnitt aller $F_T$ umfassenden topologischen Klassen $F_S$.

Man könnte vermuten, daß $\theta(F_T)$ mit der von $F_T$ erzeugten Halbgruppe $F_T^*$ zusammenfällt. Wir zeigen, daß dies i.a. nicht zutrifft. Wir benützen die Bezeichnungen $\theta$ und $\theta^*$ auch für die Typen $T \in A$. Dann haben wir

*Lemma 1.* Für jedes $T \in A$ gilt $\theta(F_T) = F_{\theta(T)}$. Die gleiche Beziehung gilt auch für $\theta^*$.

*Beweis*

1. $\theta(T)$ ist abgeschlossener Typ oberhalb von $T$. Damit ist $F_{\theta(T)}$ Halbgruppe oberhalb von $F_T$ und demnach $\theta(F_T) \subseteqq F_{\theta(T)}$.

2. Wäre $F_S =_{\mathrm{Def}} \theta(F_T) \subset F_{\theta(T)}$, so wäre $T \leqq S < \theta(T)$. Da $S$ abgeschlossen ist, wäre $\theta(T)$ nicht der kleinste abgeschlossene Typ oberhalb von $T$.

Ab jetzt beschränken wir uns auf einbettende $T$. Für diese ist offenbar $\theta(T) = \theta^*(T)$. Für einbettende $T$ gilt stets

$$T_n(m) \subseteqq T_n^2(m) \subseteqq T_n^3(m) \subseteqq \ldots \subseteqq \{1, \ldots, n\}.$$

Demnach gibt es für jedes $n$ und $m \leqq n$ ein $k_{nm}$ mit

$$T_n^{k_{nm}}(m) = T_n^{k_{nm}+1}(m).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

*Lemma 2.* Für einbettende Typen $T$ ist $(\theta(T))_n(m) = T_n^{k_{nm}}(m)$.

*Beweis.* $R$ sei abgeschlossener Typ mit $T \leqq R$. Das bedeutet nach Definition 2

$$T_n(m) \subseteqq R_n(m)$$

für alle $n$ und $m \leqq n$. Hieraus folgt unter Beachtung von Definition 4

$$T_n^2(m) \subseteqq T_n(R_n(m)) \subseteqq R_n^2(m) \subseteqq R_n(m)$$

und durch vollständige Induktion

$$T_n^k(m) \subseteqq R_n(m)$$

für jedes $k$. Jeder abgeschlossene Typ oberhalb von $T$ umfaßt daher den in der Aussage des Lemmas angegebenen Typ. Da dieser offenbar selbst abgeschlossen ist, ist das Lemma bewiesen.

*Definition 6.* Der einbettende Typ $T$ heißt von endlicher Ordnung $=_{\mathrm{Def}}$ $\exists k \forall n (T_n^k = T_n^{k+1})$.

*Satz 6.* Ist der einbettende Typ $T$ nicht von endlicher Ordnung, so ist $F_T^* \neq \theta(F_T)$.

*Beweis.* Für jedes $f \in F_T^*$ ist $T_f < \theta(T)$. Ist nämlich $f = f_1 \circ \ldots \circ f_r$, so ist jedenfalls $(T_f)_n(m) \subseteqq T_n^r(m)$ für alle $n$ und $m \leqq n$ (vgl. Beweis von Satz 3). Nach Voraussetzung existiert eine solche unendliche Folge $k_{n_1} < k_{n_2} < \ldots$, daß $T_{n_i}^{k_{n_i}} \neq (\theta(T))_{n_i}$ ist. Man wähle nun $i$ so groß, daß $r \leqq k_{n_i}$ ist. Dann gilt für passendes $m$

$$(T_f)_{n_i}(m) \subseteqq T_{n_i}^r(m) \subseteqq T_{n_i}^{k_{n_i}}(m) \neq (\theta(T))_{n_i}(m).$$

Wäre $F_T^* = \theta(F_T) = F_{\theta(T)}$, so müßte jedes $f$ mit $T_f = \theta(T)$ in $F_T^*$ liegen, was dem eben bewiesenen widerspricht.

*Folgerung.* Die Klassen $F_T$ mit abgeschlossenem $T$ sind nicht die einzigen Unterhalbgruppen von $W$.

*Beweis.* Wir brauchen nur zu zeigen, daß es Typen gibt, die keine endliche Ordnung haben. Als Beispiel wählen wir

$$T_n(m) = \begin{cases} \{m-1, m\} & \text{für } 1 < m \leqq n, \\ \{1\} & \text{für } m = 1. \end{cases}$$

$F_T$ ist die Klasse der 1-stabilen sequentiellen Wortfunktionen, während $\theta(F_T)$ die Klasse der sequentiellen Funktionen ist. Da $T$ offenbar nicht von endlicher Ordnung ist, gehört $F_T^*$ nicht zu $\mathfrak{K}$, weil sonst $F_T^* = \theta(F_T)$ gelten müßte, was nach Satz 6 unmöglich ist. (Diesem Sachverhalt entspricht die bekannte Tatsache, daß nicht jede sequentielle Funktion als Produkt 1-stabiler sequentieller Funktionen darstellbar ist.)

Die Umkehrung von Satz 6 ist i.a. nicht richtig.

## Описание словарьных функции, которые сохраняют длину, при помощи понятий из теории структур

Пусть $T$ однозначное отображение из множества всех пар натуральных чисел в множество всех конечных множеств натуральных чисел со свойствами

(1) $\forall n \forall m (m \leqq n \rightarrow T(n, m) \subseteqq \{1, \ldots, n\})$,

(2) $T(n, m)$ не определенно для $m > n$.

Словарьная сохраняющая длину функция $f$ называется функцией типа $T$, когда выполняется следующее условие: Когда $f(x_1 \ldots x_n) = y_1 \ldots y_n$, $y_m$ зависит только от букв множества

$$\{x_i : i \in T(n,m)\}.$$

Множество всех типов естественным образом образует польную, атомарную булевую структуру, которая изоморфна структуре всех $F_T$ ($F_T$ является множеством всех функций типа $T$). Рассматрываются замкнутые и топологические типи и исследуются их свойства. Например, $F_T$ тогда и только тогда является полугруппой, когда $T$ замкнутый тип.

SEKTION MATHEMATIK
FRIEDRICH SCHILLER UNIVERSITÄT
69 JENA, DDR
UNIVERSITÄTS HOCHHAUS

## Literatur

[1] COHN, P. M., *Universal Algebra*, Harper & Row Publishers, New York, Evanston and London, 1965.
[2] SZÁSZ, G., *Einführung in die Verbandstheorie*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962.

*(Eingegangen am 2. Februar 1972)*