Couverture irrédondante des fonctions booléennes définies par leurs monômes vrais et faux — fonctions simultanées

J. C. TORGUE,* K. PÁSZTOR,** P. AZEMA*

I-INTRODUCTION

Dans un article récent, E. MORREALE [4] a défini un algorithme pour la recherche d'une base irrédondante des fonctions logiques[1] définies par les points de leur borne supérieure. Dans un premier temps, cette méthode a été modifiée [6] pour traiter les fonctions très incomplètement spécifiées presque toujours définies par l'ensemble des points de leur borne supérieure et du complément de leur borne supérieure.

Dans les problèmes concrets il arrive très souvent que toutes les combinaisons des variables ne soient pas employées pour définir l'état de la sortie, c'est pourquoi la première-partie de cet article présente un algorithme déduit des deux précédents, s'appliquant au cas des fonctions données par un ensemble de monômes qui couvrent les points vrais et de monômes qui couvrent les points faux.

La deuxième partie aborde le problème de la couverture irrédondante des fonctions simultanées.[2] Ce problème, très complexe, a été étudié dans de nombreux articles. Certaines méthodes [1], Tag Method [2], Consensus [5] exigent le calcul de tous les implicants premiers et conduisent donc ou a la résolution de table de choix, ou à la recherche de couverture irrédondante par des moyens appropriés [3], [8]. L'approche présentée, basée sur les travaux de [7] et [4], permet de considérer seulement les implicants premiers utiles à la génération d'une base irrédondante.

II-FONCTIONS DEFINIES PAR LEURS MONOMES VRAIS ET FAUX

Soit $F(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ une fonction booléenne de n variables définies par l'ensemble P de ses monômes où elle prend la valeur 1 et par l'ensemble Q de ceux où elle prend la valeur 0. Nous allons chercher tour à tour si, pour chaque $i \in \{1, n\}$, il existe des implicants premiers appartenant à la base irrédondante et commençant par les variables x_i ou $\bar{x}_i$ qui seront notées x_i^α, $\alpha \in \{0, 1\}$ avec $x_i^0 = \bar{x}_i$ (valeur logique 0) et $x_i^1 = x_i$ (valeur logique 1). Pour cela, il est nécessaire d'introduire les trois opérateurs suivants.

[1] switching functions
[2] multiple output switching functions

Définitions

Définition 1. *Réduction.* La réduction notée $R_{x_i}\left(\frac{P}{Q}\right)$ efface dans P/Q la colonne correspondant à la variable x_i

$$R_{x_1}\left|\begin{array}{cccc} 0 & - & 1 & 0 \\ - & - & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & - \end{array}\right| = \begin{array}{ccc} - & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ - & 1 & 1 \\ 1 & 0 & - \end{array}.$$

Définition 2. *Intersection.* L'intersection notée $I_{x_i^\alpha}\left(\frac{P}{Q}\right)$ consiste à retenir dans le tableau P les lignes où $x_i=\alpha$ et à enlever de Q celles où $x_i=\bar{\alpha}$ puis à appliquer R_{x_i} à ce qu'il reste de P/Q

$$I_{x_3}\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ - & - & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0 & 1 & - & - \end{array}\right| = \begin{array}{ccc} 0 & - & 0 \\ & & \\ & & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & - \end{array}.$$

Définition 3. *Couverture.* La couverture $C(P/Q)$ efface de P les lignes includes dans l'implicant premier trouvé et extraie des monômes les points restant à couvrir.

$$\frac{P}{Q} = \begin{array}{cccc} - & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{array}$$

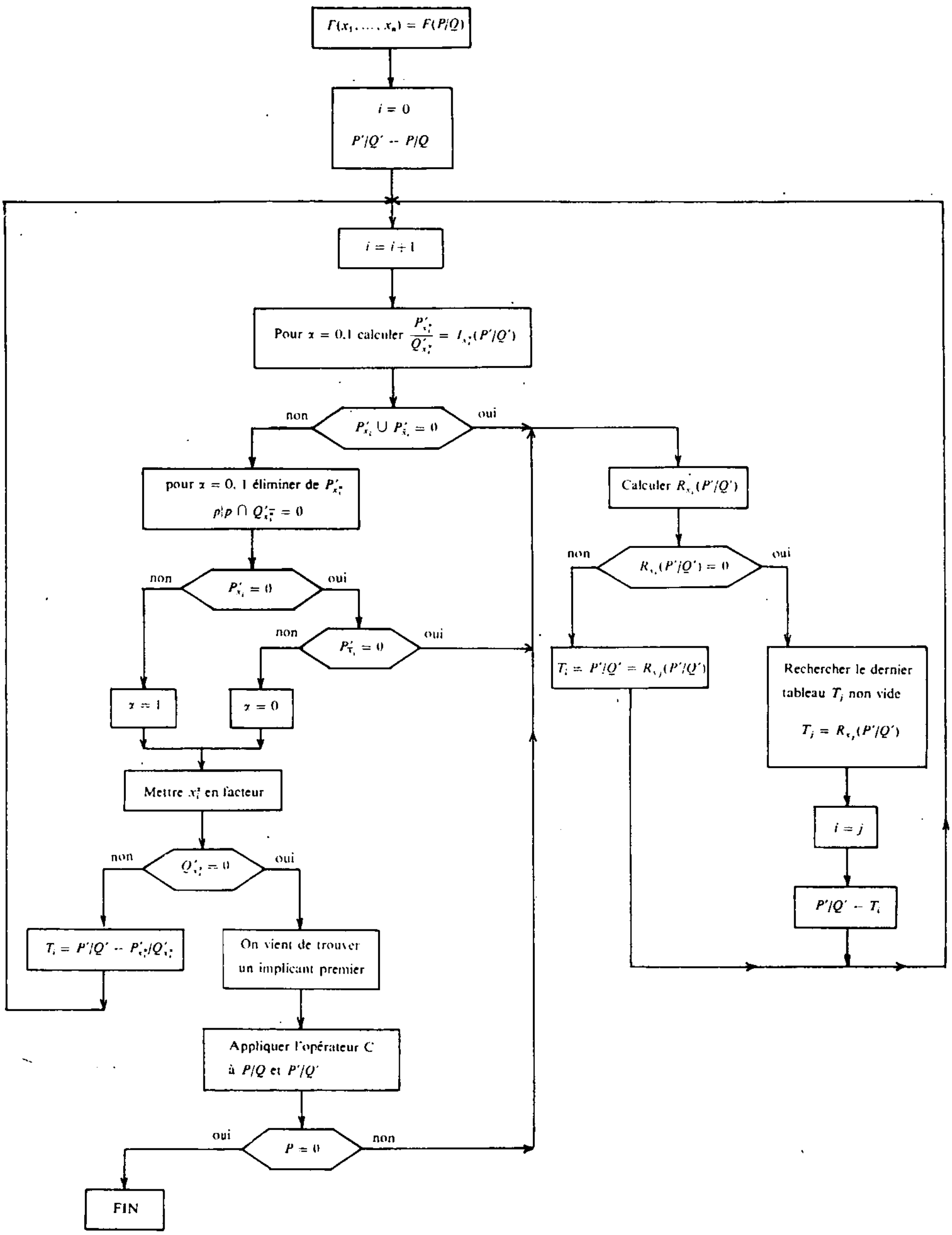
avec l'implicant premier $\bar{x}_1 x_3$ on a

$$C\left(\frac{P}{Q}\right) = \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{array}.$$

Proposition 1. Considérons $I_{x_i^\alpha}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P_{x_i^\alpha}}{Q_{x_i^\alpha}}$ pour $\alpha\in\{0,1\}$; Si $P_{x_i^\alpha} \cap Q_{x_i^{\bar{\alpha}}} = \emptyset$ alors les points de $P_{x_i^\alpha}$ peuvent être couverts par un implicant premier où la variable x_i^α n'apparaît pas.

En effet, pour tout élément p de $P_{x_i^\alpha}$, $P_{x_i^\alpha} \cap Q_{x_i^{\bar{\alpha}}} = \emptyset$ signifie qu'aucun point de p n'appertient à $Q_{x_i^\alpha}$ donc que $x_i^{\bar{\alpha}}\cdot p + x_i^\alpha \cdot p$ appartient à la borne supérieure. Donc que p peut être couvert par un implicant premier où la variable x_i^α n'apparaît pas.

Organigramme



Proposition 2. A la fonction $F\left(\frac{P}{Q}\right)$ appliquons l'opérateur $I_{x_i^\alpha}$; Si $I_{x_i^\alpha}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P_{x_i^\alpha}}{Q_{x_i^\alpha}}$ est tel que $Q_{x_i^\alpha} = \emptyset$, alors x_i^α est implicant premier de F.

x_i^α est implicant premier car $Q_{x_i^\alpha} = \emptyset$ veut dire qu'aucun point de la fonction où x_i^α apparaît n'appartient pas à Q. Cet implicant est premier car Q étant non vide et la fonction F n'est pas la fonction identité.

Algorithme

1. Soit $F(x_1, \dots, x_n) = P/Q$, $i = 0$; $T_i = P'/Q' = P/Q$, $i = 1$.

2. $i = i+1$;

   a) Appliquer $I_{x_i^\alpha}$, $\alpha = \{0, 1\}$ à P'/Q';

   b) Si $P'_{xi} \cup P'_{\bar{x}_i} = \emptyset$ aller en 7.

3. Pour $\alpha = \{0, 1\}$ vérifier s'il existe un implicant premier de la couverture devant contenir x_i^α. Enlever des tableaux $P'_{x_i^\alpha}$ les termes ayant une intersection vide avec $Q'_{x_i^\alpha}$.

4. *a)* Si $P'_{xi} \neq \emptyset$ poser $\alpha = 1$ et aller en 6;

   b) Si $P'_{xi} \neq \emptyset$ poser $\alpha = 0$ et aller en 6.

5. Appliquer R_{x_i} à P'/Q'. Si le tableau obtenu est vide rechercher le dernier tableau non vide des étapes précédentes, soit T_j, faire $i=j$ et le mettre dans $R_{x_i}(P'/Q')$. Transférer $R_{x_i}(P'/Q')$ dans P'/Q', incrémenter i et aller en 2. Si non, mettre $R_{x_i}(P'/Q')$ en $P'/Q' = T_i$, aller en 2.

6. *a)* Mettre x_i^α en facteur;

   b) Si $Q'_{x_i^\alpha} \neq \emptyset$ mettre $I_{x_i^\alpha}(P'/Q')$ dans $P'/Q' = T_i$, aller en 2.

   Si $Q'_{x_i^\alpha} = \emptyset$ le terme facteur de $I_{x_i}(P'/Q')$ est un implicant premier de la base irrédondante. Appliquer l'opérateur Couverture à P/Q et P'/Q'. Si P n'est pas vide aller en 5.

7. FIN

III-FONCTIONS SIMULTANEES DEFINIES PAR L' ENSEMBLE DE LEURS POINTS VRAIS ET FAUX

La méthode exposée au paragraphe précédent peut être généralisée au cas des fonctions simultanées.

Notations

Soit $F=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ m fonctions simultanées où chaque fonction φ_i $i=\{1,m\}$ dépend de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chaque φ_i est définie par l'ensemble de ses points vrais P_i et celui de ses points faux Q_i. L'ensemble des points vrais de F sera alors $P=\bigcup_{i=1}^{m} P_i$, celui de ses points faux $Q=\bigcup_{i=1}^{m} Q_i$. A chaque point de P (respectivement Q) on associe une étiquette constituée de m bits dont le $i^{\text{ième}}$ prendra pour valeur 1 ou 0 suivant que le point appartient ou n'appartient pas à P_i (respectivement Q_i).

Par exemple: $F = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ où

$$\varphi_1 = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \multimap P_1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\varphi_2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 \multimap P_2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

donnent

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Définitions

Les opérateurs intersection $I_{x_i^\alpha}$ et réduction R_{x_i} gardent la même définition qu'au paragraphe II-1. L'opérateur couverture est modifié de la manière suivante.

Définition 4. *Couverture.* Dans l'ensemble des points couverts par l'implicant premier mettre à 0 les composantes des étiquettes correspondant aux fonctions effectivement couvertes. Si toutes les composantes d'une étiquette sont nulles, effacer de P la ligne correspondante.

Remarque. Ceci va nous conduire à l'utilisation de deux étiquettes différentes pour les points de P: l'étiquette initiale et une étiquette dite de travail, déduite de la première après application de l'opérateur couverture.

Nous noterons „Etic" et „Etict" les étiquettes originales et de travail correspondantes.

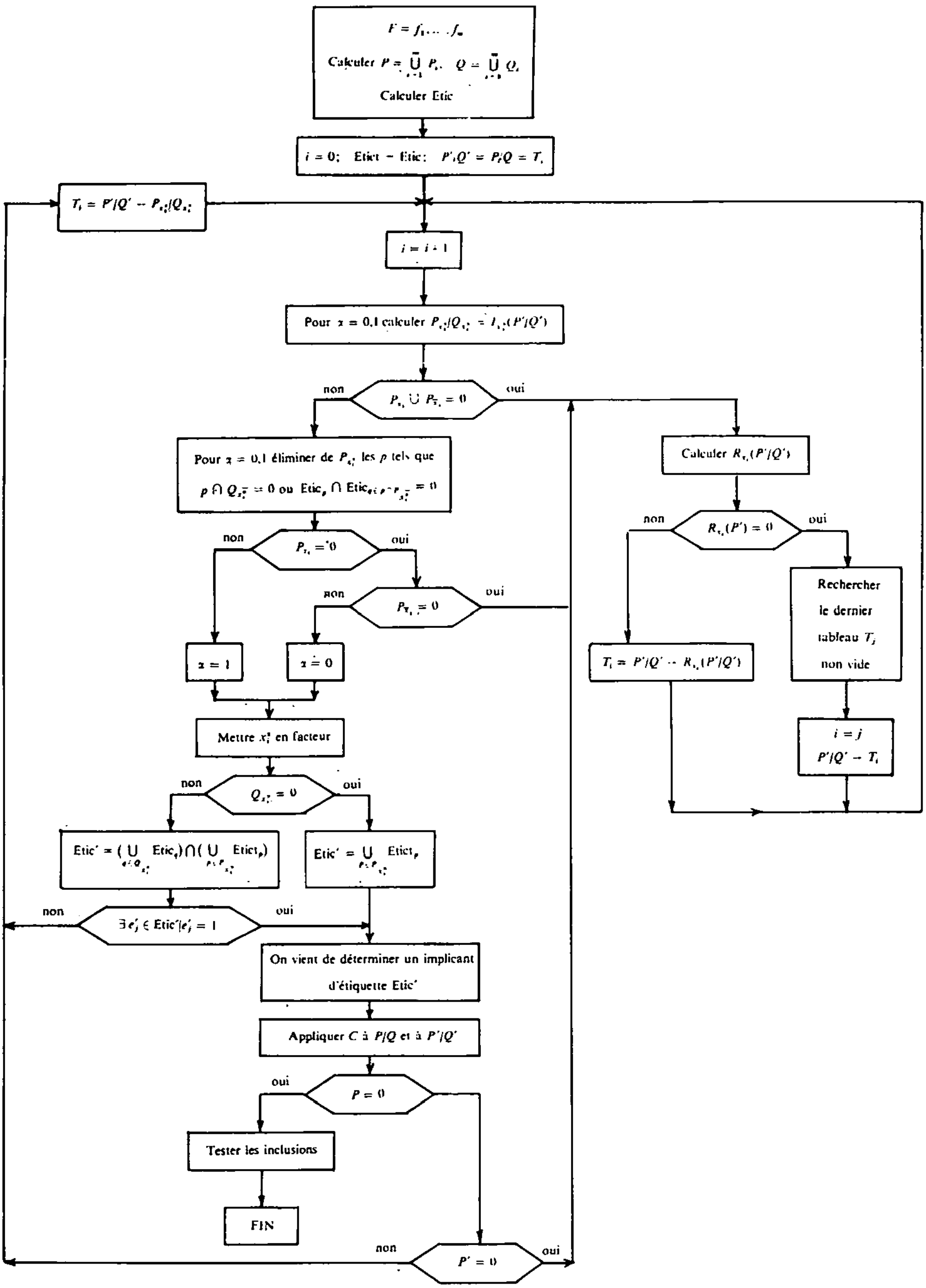
Nous allons définir sur ces étiquettes trois règles de calcul.

Définition 5. *Opération Union.* $\text{Etic}=\bigcup_{i=1}^{k} \text{Etic}_i$ où chaque composante de Etic est obtenue par l'union des composantes correspondantes de Etic_i.

Définition 6. *Opération ET.* $\text{Etic}=\bigcap_{i=1}^{k} \text{Etic}_i$ où chaque composante de Etic est obtenue en faisant l'intersection des composantes de même rang de Etic_i.

Définition 7. *Opérateur Négation.* $\overline{\text{Etic}}$ est obtenue par la complémentation de chaque composante de Etic.

Organigramme



Proposition 3. A la fonction $F(P/Q)$ appliquons l'opérateur $I_{x_i^\alpha}$. Si $I_{x_i^\alpha}(P/Q) = \frac{P_{x_i^\alpha}}{Q_{x_i^\alpha}}$ est tel que $Q_{x_i^\alpha} = \emptyset$ ou tel qu'il existe au moins une composante φ_j pour laquelle $Q_{x_i^\alpha} = \emptyset$, alors x_i^α est un implicant premier.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2.

Remarque. Pour reconnaitre les composantes φ_j pour lesquelles Q_{x_i} est vide, il faut calculer l'expression

$$\text{Etic} = (\overline{\bigcup_{q \in Q} \text{Etic}_q}) \cap (\bigcup_{p \in P} \text{Etict}_p).$$

Les composantes non nulles de Etic correspondent aux φ_j. Etic est également l'étiquette de l'implicant premier obtenu.

Proposition 4. Considérons $I_{x_i^\alpha}(P/Q) = \frac{P_{x_i^\alpha}}{Q_{x_i^\alpha}}$ pour $\alpha = \{0, 1\}$. Soit $A = P_{x_i^\alpha} \cap Q_{x_i^{\bar{\alpha}}}$;

Si $A = \emptyset$ ou si pour chaque élément de A les étiquettes qui lui correspondent dans $P_{x_i^\alpha}$ et $Q_{x_i^{\bar{\alpha}}}$ sont disjointes, alors les points de $P_{x_i^\alpha}$ peuvent être couverts par un implicant premier où la variable x_i^α n'apparaît pas.

En effet pour un élément de A dire que les étiquettes qui lui correspondent dans $P_{x_i^\alpha}$ et $Q_{x_i^{\bar{\alpha}}}$ sont disjointes c'est dire que pour chaque fonction $\varphi_j, j = \{1, m\}$ la $j^{\text{ième}}$ composante de l'intersection des étiquettes est 0

— soit dans $P_{x_i^\alpha}$ ce en quoi le point A n'appartient pas à la fonction φ_j;

— soit dans $Q_{x_i^{\bar{\alpha}}}$ qui est alors vide pour φ_j. Et on est ainsi ramené à la démonstration de la propostion 1.

Algorithme

1. Pour $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ former les tableaux $P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$ et $Q = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$. Calculer les étiquettes Etic et Etict, $i = 0$, $T_i = P'/Q' = P/Q$.

2. $i = i + 1$; Pour $\alpha = \{0, 1\}$ appliquer $I_{x_i^\alpha}$. Si P'_{x_i} et $P'_{\bar{x}_i}$ sont vides aller en 5.

3. Pour $\alpha = \{0,1\}$ enlever de $P'_{x_i^\alpha}$ les termes n'appartenant pas à $Q'_{x_i^{\bar{\alpha}}}$ ou y apparaissant avec une étiquette disjointe.

4. *a*) Si $P'_{x_i} \neq \emptyset$ poser $\alpha = 1$ et aller en 6;

   b) Si $P'_{\bar{x}_i} \neq \emptyset$ poser $\alpha = 0$ et aller en 6.

5. Appliquer R_{x_i} à P'/Q'. Si le tableau obtenu est vide mettre le dernier tableau T_j non vide dans R_{x_i} (P'/Q') et faire $i = j$. Transférer $R_{x_i}(P'/Q')$ dans P'/Q', incrémenter i et aller en 2. Si, non mettre $R_{x_i}(P'/Q')$ en $P'/Q' = T_i$ et aller en 2.

6. Mettre x_i^α en facteur.

7. *a)* Si un implicant premier a été généré le mettre dans la base irrédondante avec son étiquette. Appliquer C à P/Q et P'/Q'. Si P est vide aller en 8; Si P' est vide aller en 5.

b) Mettre $I_{x_i^{\alpha}}(P'/Q')$ dans $P'/Q'=T_i$, incrémenter i et aller en 2.

8. Tester pour chaque φ_j $(j=1,\ m)$ les redondances possibles par inclusion.

9. FIN

Exemple

Considérons la fonction $F=\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ des variables $x_1 \dots x_4$ définie par

$$\frac{P}{Q}=\begin{array}{cccc@{\quad}ccc@{\quad}ccc}
 & & & & & \text{Etic} & & & \text{Etict} & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array}.$$

L'application de $I_{x_1^{\alpha}}$ donne

$$\frac{P'_{x_1}}{Q'_{x_1}}=\begin{array}{ccc@{\quad}ccc@{\quad}ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array}
\quad\text{et}\quad
\frac{P'_{\bar{x}_1}}{Q'_{\bar{x}_1}}=\begin{array}{ccc@{\quad}ccc}
 & & \emptyset & & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}.$$

A l'issuede l'étape 3 seul subsiste

$$\frac{P'_{x_1}}{Q'_{x_1}}=\begin{array}{ccc@{\quad}ccc@{\quad}ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array}.$$

Le terme x_1 facteur de $\frac{P'_{x_1}}{Q'_{x_1}}$ est implicant pour φ_2 et φ_3 car pour ces deux composantes Q'_{x_1} est vide. L'application de la couverture donne

$$\frac{P}{Q}=\begin{array}{cccc@{\quad}ccc@{\quad}ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array},
\quad
\frac{P'_{x_1}}{Q'_{x_1}}=\begin{array}{ccc@{\quad}ccc}
 & & \emptyset & & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}.$$

Le dernier tableau non vide est P/Q. On applique donc I_{x_1} ce qui conduit à

$$\frac{P'_{x_1}}{Q'_{x_1}} = \frac{0\ 0\ 0 \quad 1\ 1\ 1 \quad 1\ 0\ 0}{\begin{array}{ccc} 0\ 1\ 0 & 1\ 0\ 0 & \\ 1\ 1\ 0 & 1\ 0\ 0 & \end{array}}, \quad \frac{P'_{\bar{x}_1}}{Q'_{\bar{x}_1}} = \frac{\emptyset}{\begin{array}{cc} 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0 \end{array}}.$$

L'algorithme se poursuit sur $P'_{\bar{x}_1}/Q'_{\bar{x}_1}$, mise en facteur de x_1 et application de $I_{x_2^\alpha}$

$$\frac{P'_{x_2}}{Q'_{x_2}} = x_1 \frac{\emptyset}{1\ 0 \quad 1\ 0\ 0}, \quad \frac{P'_{\bar{x}_2}}{Q'_{\bar{x}_2}} = \frac{0\ 0 \quad 1\ 1\ 1 \quad 1\ 0\ 0}{1\ 0 \quad 1\ 0\ 0 \qquad\qquad}.$$

$P'_{\bar{x}_2}$ disparaît car $10 \cap 00 = \emptyset$. On calcule donc $R_{x_2}(P'_{x_1}/Q'_{x_1})$ ce qui donne

$$R_{x_2}(P'_{x_1}/Q'_{x_1}) = x_1 \frac{0\ 0 \quad 1\ 1\ 1 \quad 1\ 0\ 0}{1\ 0 \quad 1\ 0\ 0 \qquad\qquad}$$

sur lequel applique I_{x_3}

$$\frac{P'_{x_3}}{Q'_{x_3}} = x_1 \frac{\emptyset}{0 \quad 1\ 0\ 0}, \quad \frac{P'_{\bar{x}_3}}{Q'_{\bar{x}_3}} = x_1 \frac{0 \quad 1\ 1\ 1 \quad 1\ 0\ 0}{\emptyset}$$

$x_1\bar{x}_3$ est implicant premier avec l'étiquette 1 0 0 donc pour la composante φ_1. On a donc pour couverture irrédondante

$$\begin{cases} \varphi_1 = x_1\bar{x}_3, \\ \varphi_2 = x_1, \\ \varphi_3 = x_1. \end{cases}$$

IV-CONCLUSION

Les deux algorithmes présentés ici ont pour atout de ne générer que les implicants prémiers nécessaires, à l'obtention d'une base irrédondante, les autres étant ignorés. De plus leur programmation ne nécessite au maximum que le double de l'emplacement mémoire nécessaire aux données, ce qui, pour un problème de taille importante, est un très puissant avantage.

Abstract

In this article we introduce a modification of the recursive operator [4]. We prepare an algorithm which with the help of the recursive operator determines a nonredundant covering of a partially defined Boolean function given in disjunctive normal form. This Boolean function is given by its implicants where the function takes the value 1 resp. 0.

By a transformation of the recursive operator we extend the algorithm to determine an irredundant covering of multiple-output functions. In this case the function $F = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ is given by their true and false minterms.

The flow-chart of the algorithms can be found in the paper and the procedures are illustrated by several examples.

Резюме

В стате мы напишем модификацию рекурсивного оператора [4]. Разрабатываем алгорифм который с помощью рекурсивного оператора определяет тупыковое покрытие не польностю определенных функций данные в Дизюнктивном нормальном форме. Эти Булевые функции определены через импликатны где функция равно 1 или 0.

После переработки рекурсивного оператора расширяем алгорифм чтобы приспособить его для определения тупыкового покрытия многовыходных функций в таком случае когда $F=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ данная через те точки где эти функции равны 1 или 0. В стате даются блочные схемы алгорифмов и разработано несколько задач с помощью этих алгорифмов.

* LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE ET D'ANALYSE DES SYSTEMES DU C.N.R.S. TOULOUSE

** COMPUTER AND AUTOMATION INSTITUTE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST, HUNGARY

References

[1] Mc Cluskey, E. J. & H. Shorr, Essential multiple output prime implicants, *Proc. Symposium on Mathematical Theory of Automation*, v. 12, 1962, pp. 437—452.

[2] Sze Tsen Hu, *Mathematical theory of switching circuits and automata*, University of California Press, 1968.

[3] Miller, J. R., An extension of Ghazala's methods to incompletely specified multiple output switching functions, Rep. NRL (Naval Res. Lab.) 7028, Feb. 1970.

[4] Morreale, E., Recursive operators for prime implicants and irredundant normal form determination, *IEEE Trans. Computers*, v. 19, 1970, pp. 405—409.

[5] Marcus, M. P. & W. H. Michoff, Iterated consensus method for multiple output functions, *IBM J. Res. Develop.*, 1970, pp. 677—679.

[6] Azema, P., M. Diaz & J. C. Torgue, Minimisation des fonctions logiques incomplētement spécifiées, *Electronics Letters*, v. 8, 1972, pp. 393—394.

[7] Pasztor K.—Varga, On some minimizing algorithms of Boolean Functions, *Technica Academica Scientiarum Hungaricae*, v.72, 1972, pp. 365—378.

[8] Majithia, J. C., A simple technique for determination of essential multiple output prime implicants, *IEEE Trans. Computers*, v. 21, 1972, pp. 1024—1026.

(Reçu le 8 juin 1973*)*