Acta Cybernetica, Tom. 2, Fasc. 4, Szeged, 1975.

О сравнении предельных логик при моделировании в них конечно-значных логик

J. DEMETROVICS

В настоящей работе мы будем рассматривать предельные логики [1] с точки зрения их возможностей моделировать конечно-значные логики. Это свойство естественным образом индуцирует на множестве всех предельных логик некоторое отношение частичного порядка. Именно, каждой предельной логике ставится в соответствие некоторое покрытие натурального ряда бесконечной системой конечных множеств. Отношение порядка на множестве предельных логик индуцируется некоторым уточняемым ниже отношением порядка на множестве таких покрытий. Будет показано существование максимального и минимального элементов в этом частичном порядке и относительно естественно возникающей при этом эквивалентности предельных логик будет установлена континуальность классов эквивалентности.

Автор выражает свою благодарность С. В. Яблонскому, под руководством которого выполнена работа.

1°. $P_{\aleph_0}$ обозначает множество всех функций, переменные которых определены на множестве $E_{\aleph_0}$ мощности $\aleph_0$ и сами функции принимают значения из этого же множества. В качестве $E_{\aleph_0}$ возьмем множество всех целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Множество $P_{\aleph_0}$ называется счетнозначной логикой. Обычно, $P_{\aleph_0}$ задается путём фиксации алфавита переменных $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ и имен функций $f_\nu(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где ν пробегает некоторое континуальное множество индексов (обозначение: $P_{\aleph_0}(X)$).

Функция $g(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$ называется функцией k — значной логики $P_k(k\geqq 2)$, если ее аргументы определены на множестве $E_k=\{0, 1, \ldots, k-1\}$ и любое значение $g(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ принадлежит множеству E_k при $a_i\in E_k (1\leqq i\leqq n)$.

Обычным образом на множествах $P_{\aleph_0}$ и P_k, $k\geqq 2$ определяется суперпозиция функций, понятие замыкания и замкнутого относительно суперпозиции класса функций [2, 3].

Множество функций $\mathfrak{A}\subseteqq P_{\aleph_0}(X)$ гомоморфно отображается на множество функций $\mathfrak{B}\subseteqq P_{\aleph_0}(Y)$, если

1. существует взаимно-однозначное соответствие между переменными $x_i \leftrightarrow y_i$;
2. каждой функции f из $\mathfrak{A}$ однозначно отвечает функция g из $\mathfrak{B}$, зависящая от соответствующих переменных;
3. всякой суперпозиции функций из $\mathfrak{A}$, принадлежащей $\mathfrak{A}$, отвечает анало-

гичная суперпозиция соответствующих функций системы $\mathfrak{B}$, которая также принадлежит $\mathfrak{B}$.

Если при этом отображении гомоморфизм имеет место в обе стороны, то говорят, что системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.

Замкнутый класс $P \subset P_{\aleph_0}$ называется предельной логикой, если

1. P состоит из счетного числа функций;

2. P содержит гомоморфные прообразы k — значных логик $P_k (k \geqq 2)$, т. е. для всякого натурального числа k, $k \geqq 2$ существует множество A_k из P, которое гомоморфно отображается на множество всех функций k — значной логики P_k.

2^0. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая предельная логика, ε — подмножество множества $E_{\aleph_0}$ и пусть функция $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}$. Обозначим через $\bar{f}_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$ функцию, определенную на множестве $\varepsilon \times \dots \times \varepsilon$ и совпадающую на этом множестве с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$. Функцию $\bar{f}_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$ назовем сужением функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на множество ε. Сужением множества функций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ на множество ε назовем множество $\overline{\mathfrak{M}}_\varepsilon$ сужений функций из $\mathfrak{M}$ на множество ε.

Скажем, что замкнутое множество функций $A_k \subset P_{\aleph_0}$ моделирует k — значную логику P_k на множестве $\varepsilon_k = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$, $e_j < e_{j+1}$, $j=0, 1, \dots, k-2$, $\varepsilon_k \subset E_{\aleph_0}$, если существует функция $f(x_1, x_2)$, принадлежащая множеству A_k такая, что

$$\bar{f}_{\varepsilon_k}(x_1, x_2) = \begin{cases} e_{i+1}, & \text{если } (x_1, x_2) \in \varepsilon_k \times \varepsilon_k \text{ и } \max(x_1, x_2) = e_i, \text{ где } 0 \leqq i \leqq k-2; \\ e_0, & \text{если } (x_1, x_2) \in \varepsilon_k \times \varepsilon_k \text{ и либо } x_1 = e_{k-1}, \text{ либо } x_2 = e_{k-1}. \end{cases}$$

Заметим, что если множество функций A_k моделирует k — значную логику на множестве ε_k, то в нем существует подмножество, сужение которого на ε_k изоморфно P_k. В самом деле в качестве такого подмножества следует взять $[\{f(x_1, x_2)\}]$. Тогда $\bar{f}_{\varepsilon_k}(x_1, x_2) \leftrightarrow W_k(z_1, z_2)$, где $W_k(z_1, z_2)$ — функция Вебба [4], дает нужный нам изоморфизм.

Пусть дан замкнутый класс A, $A \subset P_{\aleph_0}$. Введем понятие таблицы класса T_A следующим образом.

Определение. Систему T_A конечных подмножеств множества $E_{\aleph_0}$ назовем таблицей класса A, если множество $\varepsilon_k = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$ принадлежит T_A тогда и только тогда, когда класс A моделирует k — значную логику P_k на множестве ε_k. Посредством $E^A_{\aleph_0}$ обозначим множество $\bigcup_{\varepsilon \in T_A} \varepsilon$.

Легко видеть, что для каждого каласса A существует единственная таблица T_A.

Из определения таблицы T_A следует лемма.

Лемма 1. Класс функций A является предельной логикой тогда и только тогда, когда в его таблице T_A содержатся множества с любым числом элементов.

Предельные логики можно классифицировать по способу моделирования k — значных логик P_k.

Определение. Предельную логику P назовём возрастающей, если её таблица T_P содержит бесконечную последовательность конечных множеств $\Pi = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^i, \dots\}$, такую что $\varepsilon^i \subset \varepsilon^{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим через $E'^P_{\aleph_0} = \bigcup_{\varepsilon^i \in \Pi} \varepsilon^i$.

Предельную логику P назовём ящичной, если её таблица содержит бесконечную последовательность конечных множеств $\varepsilon^1_{n_1}, \varepsilon^2_{n_2}, \ldots, \varepsilon^i_{n_i}, \ldots$, такую что

1. для любых i, j $(i \neq j)$ $\varepsilon^i_{n_i} \cap \varepsilon^j_{n_j} = \emptyset$;
2. если $\varepsilon \in T_p$, то существует i такое, что $\varepsilon \subseteqq \varepsilon^i_{n_i}$.

Определение. Замкнутый класс $\mathfrak{A}$ моделируется в замкнутом классе $\mathfrak{B}$, если существует однозначное отображение δ множества $E^{\mathfrak{A}}_{\aleph_0}$ в множества $E^{\mathfrak{B}}_{\aleph_0}$ такое, что

1. если $e_i \neq e_j$ $(e_i, e_j \in E^{\mathfrak{A}}_{\aleph_0})$, то $\delta(e_i) \neq \delta(e_j)$;
2. если $\varepsilon \in T_{\mathfrak{A}}$, то $\delta(\varepsilon) \in T_{\mathfrak{B}}$.

Это обстоятельство обозначим через $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ и скажем, что $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ сравнимы. Скажем, что логики $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобны (обозначение: $\mathfrak{A} \asymp \mathfrak{B}$), если $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \succeq \mathfrak{B}$.

Определение. Минимальной предельной логикой называется та логика, которая моделируется в любой предельной логике. Максимальной предельной логикой называется та логика, в которой моделируется любая предельная логика.

Лемма 2. В любой возрастающей предельной логике моделируется любая предельная логика.

Доказательство. Пусть P — возрастающая предельная логика, $\mathfrak{A}$ — любая предельная логика, и пусть Π — бесконечная последовательность из определения возрастающей логики и $E'^{P}_{\aleph_0} = \bigcup\limits_{\varepsilon^i \in \Pi} \varepsilon^i$. Тогда существует отображение δ: $E^{\mathfrak{A}}_{\aleph_0}$ в $E'^{P}_{\aleph_0}$, удовлетворяющее условию: если $e_i \neq e_j$ $(e_i, e_j \in E^{\mathfrak{A}}_{\aleph_0})$, то $\delta(e_i) \neq \delta(e_j)$. Заметим, что из определения таблицы следует, что если множество $\varepsilon \in T_P$, то и любое подмножество ε, содержащее не менее двух элементов, также принадлежит T_P. Поэтому из свойства последовательности Π следует, что отображение δ удовлетворяет условию: если $\varepsilon \in T_{\mathfrak{A}}$, то $\delta(\varepsilon) \in T_P$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Следствие. Возрастающие предельные логики подобны между собой.

Лемма 3. В любой предельной логике моделируется любая ящичная логика.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая предельная логика, P — ящичная предельная логика, и пусть $\varepsilon^1_{n_1}, \varepsilon^2_{n_2}, \ldots, \varepsilon^i_{n_i}, \ldots$ — последовательность множеств из определения ящичной логики. Очевидно, что тогда $E^P_{\aleph_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i_{n_i}$. Строим отображение $\delta: E^P_{\aleph_0}$ в $E^{\mathfrak{A}}_{\aleph_0}$ следующим образом. Пусть ε_{n_1} — некоторый элемент таблицы $T_{\mathfrak{A}}$, содержащий n_1 элементов. В качестве δ возьмем любое взаимно-однозначное соответствие между $\varepsilon^1_{n_1}$ и ε_{n_1}. Пусть отображение δ уже определено на множествах $\varepsilon^1_{n_1}, \varepsilon^2_{n_2}, \ldots, \varepsilon^i_{n_i}$. Пусть $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_i + n_{i+1}$ и пусть ε_n — произвольный элемент таблицы $T_{\mathfrak{A}}$, содержащий n элементов. В нем можно выбрать подмножество $\varepsilon_{n_{i+1}}$, содержащее n_{i+1} элементов, такое что $\varepsilon_{n_{i+1}} \cap \delta(\varepsilon^k_{n_k}) = \emptyset$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$. Очевидно, что $\varepsilon_{n_{i+1}} \in T_{\mathfrak{A}}$ и между $\varepsilon^i_{n_{i+1}}$ и $\varepsilon_{n_{i+1}}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие. Любое из этих соответствий можно взять в качестве δ на множестве $\varepsilon^{i+1}_{n_{i+1}}$.

Лемма доказана.

Следствие. Из леммы 3 немедленно вытекает, что все ящичные предельные логики подобны между собой.

Из лемм 2 и 3 непосредственно вытекает справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. Максимальной предельной логикой является возрастающая предельная логика. Минимальной предельной логикой является ящичная предельная логика.

Следствие. Предельная логика является максимальной (соответственно, минимальной) тогда и только тогда, когда она возрастающая (соотчетственно, ящичная).

3^0. Отношение $\succsim$ разбивает множество предельных логик на классы эквивалентности. Мы рассмотрим вопрос о мощности множества этих классов.

Пусть $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ — бесконечная последовательность, состоящая из 0 и 1.

Определение. Последовательности $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ и $\beta=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$ назовем эквивалентными, если существует такое k, $k\geqq 0$, что либо для всех i имеет место $\beta_i=\alpha_{i+k}$, либо для всех i справедливо $\alpha_i=\beta_{i+k}$, где $i\geqq 1$.

Другими словами, последовательности α и β назовем эквивалентными, если либо последовательность α является концом последовательности β, либо последовательность β является концом последовательности α.

Легко видеть, что справедлива следующая лемма:

Лемма 4. Максимальная мощность множества попарно неэквивалентных последовательностей равна континууму.

Каждой бесконечной последовательности $\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots\}$ можно поставить в соответствие бесконечную последовательность конечных множеств $\varepsilon_\alpha=\{\varepsilon_{\alpha_0}, \varepsilon_{\alpha_1}, \varepsilon_{\alpha_2}, \dots, \varepsilon_{\alpha_i}, \dots\}$, где $\varepsilon_{\alpha_0}=\{2, 4, 6, 8\}$ и при $i\geqq 1$

$$\varepsilon_{\alpha_i}=\{2+b_i, 4+b_i, 6+b_i, 8+b_i\},$$

где $b_i=2i-2a_i$ и $a_i=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j$.

Лемма 5. Если в последовательности α i-ый член равен 1 (соответственно, $\alpha_i=0$) то в последовательности ε_α множества $\varepsilon_{\alpha_{i-1}}$ и ε_{α_i} имеют два (соответственно, один) общих члена.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_{\alpha_{i-1}}=\{2+b_{i-1}, 4+b_{i-1}, 6+b_{i-1}, 8+b_{i-1}\}$ и

$$\varepsilon_{\alpha_i} = \{2+b_i, 4+b_i, 6+b_i, 8+b_i\},$$

и пусть $\alpha_i=1$. Тогда имеем, что $b_{i-1}=6(i-1)-2(a_i-1)=b_i-4$. Отсюда получим, что $6+b_{i-1}=b_i+2$ и $8+b_{i-1}=b_i+4$.

А если $\alpha_i=0$, то $b_{i-1}=6(i-1)-2a_i=b_i-6$. Отсюда немедленно получим, что $b_{i-1}+8=b_i+2$. Лемма доказана.

По последовательности ε_α построим замкнутый класс функций

$$A_\alpha = \left[\bigcup_{i=0}^{\infty}\{\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2)\}\right],$$

где

$$\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \max(x_1, x_2)+2, & \text{если } (x_1, x_2)\in\varepsilon_{\alpha_i}\times\varepsilon_{\alpha_i} \text{ и } \\ & x_1\neq 8+b_i \text{ и } x_2\neq 8+b_i; \\ 2+b_i, & \text{если } (x_1, x_2)\in\varepsilon_{\alpha_i}\times\varepsilon_{\alpha_i} \text{ и } \\ & \text{либо } x_1=8+b_i, \text{ либо } x_2=8+b_i; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 6. Четырехэлементное множество ε принадлежит T_{A_α} тогда и только тогда, когда при некотором i имеет место $\varepsilon=\varepsilon_{\alpha_i}$.

Доказательство

а) Пусть $\varepsilon=\varepsilon_{\alpha_i}$. Возьмем функцию $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2)$ из A_α. В силу определения этой функции $\varepsilon_{\alpha_i}\in T_{A_\alpha}$.

б) Пусть $\varepsilon\in T_{A_\alpha}$, и функция $f(x_1, x_2)\in A_\alpha$ на множестве ε моделирует P_4. Так как $f(x_1, x_2)\in A_\alpha$, то $f(x_1, x_2)$ может быть получена из $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2)$ путем суперпозиции. Если в этой суперпозиции участвуют функции $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2)$ и $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_{i+j}}}(x_1, x_2)$ $(j\geqq 2)$, то $f(x_1, x_2)\equiv 0$. Следовательно, в этой суперпозиции участвуют только $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2)$ и $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_{i+1}}}(x_1, x_2)$ для некоторого i. По лемме 5 ε_{α_i} и $\varepsilon_{\alpha_{i+1}}$, имеют не более двух общих элементов отличных от нуля e_1 и e_2. Поэтому $f(a_1, a_2)\neq 0$, если только $a_i\in\{e_1, e_2\}$ $(i=1, 2)$. Следовательно, в суперпозиции может принимать участие только одна функция $\varphi_{\varepsilon_{\alpha_i}}(x_1, x_2)$ для некоторого i. Но это означает, что $\varepsilon=\varepsilon_{\alpha_i}$. Лемма доказана.

Лемма 7. Если последовательности α и β не эквивалентны, то A_α и A_β несравнимы.

Доказательство. Пусть α и β — неэквивалентные последовательности. Допустим, что A_α и A_β сравнимы. Пусть, например, $A_\beta\succsim A_\alpha$. Тогда в силу определения отношения $\succsim$ существует такое отображение $\delta:\varepsilon_\alpha$ в ε_β, что:

1. если $e_i\neq e_j$, то $\delta(e_i)\neq\delta(e_j)$;
2. если $\varepsilon\in T_{A_\alpha}$, то $\delta(\varepsilon)\in T_{A_\beta}$.

Рассмотрим последовательность множеств $\varepsilon_{\beta_0}, \varepsilon_{\beta_1}, \varepsilon_{\beta_2}, \ldots$. Все они суть элементы T_{A_β}. Поэтому $\delta(\varepsilon_{\alpha_0}), \delta(\varepsilon_{\alpha_1}), \delta(\varepsilon_{\alpha_2}), \ldots$ в силу 2. должны быть элементами T_{A_β}. По лемме 6 $\delta(\varepsilon_{\alpha_i})$, $i=0, 1, 2, \ldots$ есть одно из множеств ε_{β_j}. Так как ε_{α_i} и $\varepsilon_{\alpha_{i+1}}$ пересекаются, то $\delta(\varepsilon_{\alpha_i})$ и $\delta(\varepsilon_{\alpha_{i+1}})$ также должны пересекаться. Но это возможно только в том случае, если $\delta(\varepsilon_{\alpha_i})$ есть некоторое ε_{β_j}, а $\delta(\varepsilon_{\alpha_{i+1}})$ есть $\varepsilon_{\beta_{j+1}}$. Отсюда и из 1. немедленно следует, что если $\delta(\varepsilon_{\alpha_0})=\varepsilon_{\beta_k}$, то $\delta(\varepsilon_{\alpha_1})=\varepsilon_{\beta_{k+1}}, \ldots$, $\delta(\varepsilon_{\alpha_n})=\varepsilon_{\beta_{k+n}}, \ldots$. В силу построения по последовательностям α и β множеств ε_{α_i} и ε_{β_i} имеем: $\alpha_i=\beta_{k+i}$, $i=0, 1, 2, \ldots$, т. е. α и β — эквивалентные последовательности. Это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Рассмотрим следующее разбиение множества $E_{\aleph_0}$: $E_{\aleph_0}=\varepsilon_0\cup\varepsilon_1$, где $\varepsilon_0=\{0, 1, 3, \ldots, 2r+1, \ldots\}$ и $\varepsilon_1=\{2, 4, 6, \ldots, 2r, \ldots\}$, $r\geqq 0$. Множество ε_0 представим в виде $\bigcup_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k^1$, где $\varepsilon_1^1=\{0\}$ и при $k\geqq 2$ $\varepsilon_k^1=\{k(k-1)-1, k(k-1)+1, k(k-1)+3, \ldots, k(k-1)+2k-3\}$.

Определим функцию $\varphi_k(x_1, x_2)$, $k\geqq 2$, областью определения которой является множество $E_{\aleph_0}\times E_{\aleph_0}$, а областью значений множество $\varepsilon_k^1\cup\{0\}$:

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \max(x_1, x_2)+2, & \text{если } (x_1, x_2)\in\varepsilon_k^1\times\varepsilon_k^1 \text{ и} \\ & x_1\neq k(k-1)+2k-3 \text{ и } x_2\neq k(k-1)+2k-3; \\ k(k-1)-1, & \text{если } (x_1, x_2)\in\varepsilon_k^1\times\varepsilon_k^1 \text{ и либо } x_1=k(k-1)+2k-3, \\ & \text{либо } x_2=k(k-1)+2k-3; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Через R обозначим замыкание множества $\bigcup_{k=1}^{\infty}[\{\varphi_k(x_1, x_2)\}]$, где $\varphi_1(x_1, x_2)\equiv 0$. Легко видеть, что класс функций R является предельной логкой.

Теорема 2. Максимальная мощность множества попарнонесравниыхм предельных логик равна континууму. е

Доказательство. Заметим, что множество функций $[A_\alpha\cup R]$ явл яется пр-и дельной логикой, так как R — предельная логика, а мощность класса A_α счетна.

Легко видеть, что предельная логика R и класс функций A_α несравнимы. Из леммы 7 и из того, что любая суперпозиция, содержащая функции из R и из $A_\alpha(A_\beta)$, тождественно равна нулю, вытекает, что предельные логики $[A_\alpha\cup R]$ и $[A_\beta\cup R]$ несравнимы. А континуальность семейства предельных логик $\{[A_\alpha\cup R]\}$ вытекает из леммы 4.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву за ценные советы и помощь, оказанную при работе.

On the comparison of limit logics by the simulation of finite-valued logic

A class of functional systems is considered known by the name "limit logics". In this class there is introduced a relation of partial ordering, which allows the comparison of different limit logics in the respect of their ability of simulating finite-valued logics. The existence of maximal and minimal elements with respect to this ordering is proved.

It is also proved, that the family of the equivalence classes naturally generated by this ordering has the cardinality of continuum.

COMPUTER AND AUTOMATION INSTITUTE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
H—1502 BUDAPEST. HUNGARY

Литература

[1] Яблонский, С. В., О предельных логиках. *ДАН СССР*, том 118, вып. 3, 1958, стр. 657—660.
[2] Яблонский, С. В., Функциональные построения в k —значной логике, *Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, том 51, 1958, стр. 5—142.
[3] Гаврилов, Г. П., О функциональной полноте в счетно-значной логике, *Сб. Проблемы кибернетики*, вып. 15, 1965, стр, 5—64.
[4] Webb, D., Generation of any n-valued logic by one binary operator, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, v. 21, 1935, pp. 252—254.

(Поступило 24-ого января 1974 г.)