Zur Theorie kommutativer Automaten

Von J. DUSKE

1. Ein Automat ist ein Tripel $\mathscr{A}=(A, F, \delta)$. Hierbei ist A eine endliche Menge, die Zustandsmenge von $\mathscr{A}$, F ein Monoid mit Einselement e und $\delta: A\times F\to A$ eine Abbildung, für die gilt:

$$\forall a\in A,\ \forall f_1, f_2\in F\colon \delta(a, f_1 f_2)=\delta(\delta(a, f_1), f_2)$$

und

$$\forall a\in A \qquad\qquad : \delta(a, e) = a$$

Für $\delta(a, f)$ schreibt man kurz af. $\mathscr{A}=(A, F, \delta)$ heißt kommutativ in $a\in A$, wenn $af_1 f_2=af_2 f_1$ für alle $f_1, f_2\in F$ gilt. $\mathscr{A}$ heißt kommutativ, wenn $\mathscr{A}$ in allen $a\in A$ kommutativ ist.

$\mathscr{A}$ heißt zyklisch, wenn es ein $a\in A$ mit $A=\{af \mid f\in F\}$ gibt. Ein solches $a\in A$ heißt ein erzeugendes Element von $\mathscr{A}$.

Eine Äquivalenzrelation ϱ auf A heißt Relation mit S.E. (Substitutionseigenschaft), falls gilt:

$$\forall a_1, a_2\in A\colon (a_1, a_2)\in\varrho \Rightarrow \forall f\in F\colon (a_1 f, a_2 f)\in\varrho$$

Die zugehörende Partition $A_\varrho=\{A_\varrho(a)|a\in A\}$ von A heißt dann Partition mit S.E. bzgl. $\mathscr{A}$. Hierbei ist $A_\varrho(a)=\{a'|(a, a')\in\varrho\}$. Die Menge aller Relationen mit S.E. bzgl. $\mathscr{A}$ bildet einen Verband $R(\mathscr{A})$ mit den in üblicher Weise für Relationen erklärten Verbandsoperationen $\wedge$, $\vee$.

Eine Relation ϱ mit S.E. bzgl. $\mathscr{A}$ heißt kommutativ, wenn $\forall a\in A$, $\forall f_1, f_2\in F$ gilt: $(af_1 f_2, af_2 f_1)\in\varrho$. Die Menge aller Relationen auf A mit S.E. bzgl. $\mathscr{A}$, die kommutativ sind, bildet einen Teilverband $R_k(\mathscr{A})$ von $R(\mathscr{A})$. ϱ_k sei das kleinste Element von $R_k(\mathscr{A})$. Mit $A_k=\{A_{\varrho_k}(a)|a\in A\}$ werde die zugehörende Partition bezeichnet. Der Quotientenautomat $\mathscr{A}_{\varrho_k}=\mathscr{A}_k=(A_k, F, \delta_k)$ mit $\delta_k(A_{\varrho_k}(a), f)=A_{\varrho_k}(\delta(a, f))$ ist kommutativ und heißt maximaler kommutativer Quotient von $\mathscr{A}$.

Ist speziell $F=X^*$ das freie, von der endlichen Menge X erzeugte Monoid, dann wird $\mathscr{A}$ angegeben durch $\mathscr{A}=(A, X, \delta)$, wobei δ eine Funktion von $A\times X$ nach A ist. Durch $\delta(a, e)=a$ und $\delta(a, wx)=\delta(\delta(a, w), x)$ für alle $a\in A$, $x\in X$ und $w\in X^*$ wird δ zu einer Funktion von $A\times X^*$ nach A erweitert. $\mathscr{A}=(A, X, \delta)$ ist genau dann kommutativ, wenn $ax_1x_2=ax_2x_1$ für alle $a\in A$ und alle $x_1, x_2\in X$ gilt. $\mathscr{A}_k$ läßt sich in diesem Fall folgendermaßen berechnen:

Man bilde für alle Paare $(x_1, x_2) \in X \times X$, $x_1 \neq x_2$, und für alle $a \in A$ die Paare (ax_1x_2, ax_2x_1), und bestimme die kleinste Relation ϱ mit S.E. bzgl. $\mathscr{A}$, die alle diese Paare enthält. Es ist dann $\varrho = \varrho_k$.

1.1. *Beispiel.* $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ sei gegeben durch (vgl. [8]):

$\mathscr{A}$	1	2	3	4	5	6
x	4	5	6	1	2	3
y	3	1	2	5	6	4

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$X = \{x, y\}$

$\mathscr{A}$ ist nicht kommutativ. Es gilt z.B. $1xy = 5$ und $1yx = 6$. Mit $\alpha = \{1, 2, 3\}$ und $\beta = \{4, 5, 6\}$ wird $\mathscr{A}_k$ durch folgende Tafel gegeben:

$\mathscr{A}_k$	α	β
x	β	α
y	α	β

Mit η_k werde die Projektion von $\mathscr{A}$ auf $\mathscr{A}_k$ bezeichnet. Für die im folgenden verwendeten Begriffe Homomorphismus, Isomorphismus, Automorphismus und Automorphismengruppe vgl. man [4]. $\mathscr{A}_k$ besitzt folgende universelle Eigenschaft:

1.2. **Satz.** $\mathscr{B} = (B, F, \delta_1)$ sei ein kommutativer Automat und $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ ein Homomorphismus von $\mathscr{A}$ nach $\mathscr{B}$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{\varphi}: \mathscr{A}_k \to \mathscr{B}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\eta_k"'] & \mathscr{B} \\ \mathscr{A}_k \arrow[ur, two heads, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

1.3. *Lemma.* $\mathscr{A} = (A, F, \delta)$ sei ein Automat, $G(\mathscr{A})$ die Automorphismengruppe von $\mathscr{A}$ und $\alpha \in G(\mathscr{A})$. Dann gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1, a_2) \in \varrho_k \Rightarrow (\alpha(a_1), \alpha(a_2)) \in \varrho_k$$

Beweis. Es gibt genau ein $\bar{\alpha} \in G(\mathscr{A}_k)$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, tail, two heads, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\eta_k"'] & \mathscr{A} \arrow[d, two heads, "\eta_k"] \\ \mathscr{A}_k \arrow[r, tail, two heads, "\bar{\alpha}"] & \mathscr{A}_k \end{tikzcd} \tag{I}$$

Aus $(a_1, a_2) \in \varrho_k$ folgt dann $\eta_k(\alpha(a_1)) = \eta_k(\alpha(a_2))$, also $(\alpha(a_1), \alpha(a_2)) \in \varrho_k$.

1.4. *Lemma.* $\mathscr{A}$ sei ein Automat. Die Abbildung, die jedem $\alpha \in G(\mathscr{A})$ das eindeutig bestimmte $\bar{\alpha} \in G(\mathscr{A}_k)$ zuordnet, für das (I) kommutativ wird, ist ein Homomorphismus von $G(\mathscr{A})$ nach $G(\mathscr{A}_k)$.

Dieser Homomorphismus wird im folgenden mit π bezeichnet. $\mathscr{A}$ heißt streng zusammenhängend, wenn jedes $a \in A$ ein erzeugendes Element von $\mathscr{A}$ ist. Für den im folgenden verwendeten Begriff der Halbgruppe eines Automaten vgl. man [4], S. 239.

1.5. **Satz.** $\mathscr{A}=(A, F, \delta)$ sei streng zusammenhängend. H sei der Kern von π, und K die Kommutatorgruppe von $G(\mathscr{A})$. Dann gilt $K \trianglelefteq H$, d.h., K ist Normalteiler von H.

Beweis. $\mathscr{A}_k$ ist streng zusammenhängend und kommutativ. Die Halbgruppe $S(\mathscr{A}_k)$ von $\mathscr{A}_k$ (vgl. [4]) ist kommutativ und isomorph zu $G(\mathscr{A}_k)$ (vgl. [3]). Also ist $G(\mathscr{A})/H$ kommutativ, und daher $K \trianglelefteq H$.

Ist $\alpha \in H$ und $a \in A$, dann gilt:

$$\eta_k(\alpha(a))=\pi(\alpha)\eta_k(a)=\eta_k(a), \quad \text{also} \quad (\alpha(a), a) \in \varrho_k.$$

Auf Grund dieser Bemerkung ergibt sich:

1.6. *Korollar.* $\mathscr{A}=(A, F, \delta)$ sei streng zusammenhängend. Für alle $\alpha, \beta \in G(\mathscr{A})$ und alle $a \in A$ gilt:

$$(\alpha\beta(a), \beta\alpha(a)) \in \varrho_k$$

Beweis. Der Kommutator $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ liegt in H. Daher gilt $(\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta(a), a) \in \varrho_k$ für alle $a \in A$.

2. In den folgenden Abschnitten wird $F=X^*$ angenommen. $\mathscr{A}=(A, X, \delta)$ sei zyklisch und $a \in A$ ein erzeugendes Element. Man definiere folgende Rechtskongruenz auf F:

$$\forall f_1, f_2 \in F: (f_1, f_2) \in \varrho_a \Leftrightarrow af_1 = af_2$$

B_a sei die zu ϱ_a gehörende Menge von Blöcken von F. $\mathscr{F}_a=(B_a, X, \delta_a)$ mit $\delta_a(B_a(f), f_1)=B_a(ff_1)$ ist isomorph zu $\mathscr{A}$. Ein Isomorphismus wird gegeben durch $\chi(a_1)=$ $=B_a(f)$ mit $a_1=af$. $(\mathscr{F}_a)_k$ ist isomorph zu $\mathscr{A}_k$.

Zur Beschreibung von $(\mathscr{F}_a)_k$ definiere man zunächst folgende Kongruenz $\varkappa$ auf F:

$$\forall f, h \in F: (f, h) \in \varkappa \Leftrightarrow f = x_1 \dots x_n \quad \text{und}$$
$$h = x_{i_1} \dots x_{i_n}, \quad \text{wobei} \quad i_1, \dots i_n$$
$$\text{eine Permutation von } 1, \dots, n \text{ ist.}$$

Ein solches h soll Kommutant von f genannt werden, und mit $k(f)$ wird die Menge aller Kommutanten von f bezeichnet.

Sei nun τ eine beliebige Rechtskongruenz mit endlichem Index auf F und B_τ die zugehörende Partition von F. $\mathscr{F}_\tau=(B_\tau, F, \delta_\tau)$ wird in natürlicher Weise definiert. Die obere Grenze der Rechtskongruenzen $\varkappa$ und τ, $\varkappa \vee \tau$, bestimmt eine Relation η auf B_τ mit S.E. bzgl. $\mathscr{F}_\tau$ durch

$$(B_\tau(f_1), B_\tau(f_2)) \in \eta \Leftrightarrow (f_1, f_2) \in \varkappa \vee \tau \quad \text{für alle} \quad f_1, f_2 \in F.$$

Der Quotientenautomat von $\mathscr{F}_\tau$ nach η ist isomorph zu $\mathscr{F}_{\tau \vee \varkappa}$.

η ist kommutativ bzgl. $\mathscr{F}_\tau$. Seien dazu $h_1, h_2 \in F$ und $B_\eta(B_\tau(f))$ beliebig ausgewählt. Es gilt dann $B_\eta(B_\tau(f))h_1h_2=B_\eta(B_\tau(f)h_1h_2)=B_\eta(B_\tau(fh_1h_2))$. Weiter ist $(fh_1h_2, fh_2h_1) \in \tau \vee \varkappa$ also gilt $(B_\tau(fh_1h_2), B_\tau(fh_2h_1)) \in \eta$.

Bezeichnet man wieder mit ϱ_k die kleinste kommutative Relation auf B_τ mit S.E. bzgl. $\mathscr{F}_\tau$, dann ist also $\varrho_k \leqq \eta$. Es gilt auch die umgekehrte Inklusion:

$$\begin{aligned}(B_\tau(f_1), B_\tau(f_2)) \in \eta &\Leftrightarrow (f_1, f_2) \in \tau \vee \varkappa \\ &\Leftrightarrow \exists h_0, h_1, \ldots, h_n \in F \quad \text{mit} \quad f_1 = h_0, h_n = f_2 \quad \text{und} \\ &\quad (h_{i-1}, h_i) \in \varkappa \quad \text{oder} \quad (h_{i-1}, h_i) \in \tau \quad \text{für} \quad i \in [1:n]\end{aligned}$$

Gilt $(h_{i-1}, h_i) \in \varkappa$, dann ist $(B_\tau(h_{i-1}), B_\tau(h_i)) = (B_\tau(e)h_{i-1}, B_\tau(e)h_i) \in \varrho_k$. Gil $(h_{i-1}, h_i) \in \tau$, dann ist $B_\tau(h_{i-1}) = B_\tau(h_i)$. Daraus folgt $(B_\tau(f_1), B_\tau(f_2)) \in \varrho_k$, und damit $\varrho_k = \eta$, also ist $(\mathscr{F}_\tau)_k$ isomorph zu $\mathscr{F}_{\tau \vee \varkappa}$.

In $\mathscr{F}_\tau = (B_\tau, F, \delta_\tau)$ werde $B_\tau(e)$ als Anfangszustand und weiter eine Menge $S \subseteqq B_\tau$ als Menge von Endzuständen ausgezeichnet. Der so bestimmte erkennende Automat erkennt die Wortmenge

$$E = \{f | B_\tau(f) \in S\}.$$

In $\mathscr{F}_{\tau \vee \varkappa} = (B_{\tau \vee \varkappa}, F, \delta_{\tau \vee \varkappa})$ zeichne man $B_{\tau \vee \varkappa}(e)$ als Anfangszustand und $S_k = \{B_{\tau \vee \varkappa}(f) | f \in E\}$ als Menge von Endzuständen aus. Dieser Automat erkennt dann die Wortmenge

$$E' = \{h | B_{\tau \vee \varkappa}(h) \in S_k\} = \{h | \exists f \in E \quad \text{mit} \quad (h, f) \in \tau \vee \varkappa\}.$$

$E^k = \{h | \exists f \in E$ und $h \in k(f)\}$ sei die kommutative Hülle von E. Es ist $E \subseteqq E^k \subseteqq E'$, und es gilt:

$$\begin{aligned}E' = E^k &\Leftrightarrow \bigcup_{f \in E} B_{\tau \vee \varkappa}(f) = \bigcup_{f \in E} B_\varkappa(f) \\ &\Leftrightarrow \overline{\exists}(f_1, f_2) \in \tau \quad \text{mit} \quad f_1 \notin E^k \quad \text{und} \quad f_2 \in E_k \\ &\Leftrightarrow \forall h \in F \text{ gilt: aus } (h, f_1) \in \tau \text{ mit } f_1 \in k(f) \text{ für ein} \\ &\quad f \in E \text{ folgt: } \exists \bar{f} \in E \text{ mit } h \in k(\bar{f})\end{aligned}$$

Man gehe nun von einer beliebigen Wortmenge $E \subseteqq X^*$ aus. E ist genau dann regulär, wenn E Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Rechtskongruenz τ mit endlichem Index auf $F = X^*$ ist. Für τ kann man dann z.B. dei Myhill-Kongruenz oder die Nerode-Rechtskongruenz wählen (vgl. [7]). E' ist dann sicher regulär, und man erhält z.B.:

2.1. **Satz.** $E \subseteqq X^* = F$ sei regulär. Falls für alle h aus F und für alle $f \in E^k$ gilt:

$$\{\forall w \in F: hw \in E \Leftrightarrow fw \in E\} \Rightarrow h \in E^k,$$

dann ist E^k regulär.

$E \subseteqq X^* = F$ sei eine reguläre Menge, und $\mathscr{A}(E)$ die Menge aller endlichen erkennenden Automaten, die E erkennen, und deren Anfangszustand ein erzeugendes Element ist. $k(\mathscr{A}(E))$ sei die Menge aller maximalen kommutativen Quotienten von Automaten aus $\mathscr{A}(E)$. Es gilt:

2.2. **Satz.** E sei regulär. E^k ist genau dann regulär, wenn E^k von einem Automaten aus $k(\mathscr{A}(E))$ erkannt wird.

Beweis. E^k sei regulär. σ sei die Myhill-Kongruenz von E und γ die Myhill-Kongruenz von E^k. $\tau=\sigma\wedge\gamma$ besitzt einen endlichen Index. E ist Vereinigung von Äquivalenzklassen bzgl. τ. Es ist also $\mathscr{F}_\tau=(B_\tau, F, \delta_\tau)\in\mathscr{A}(E)$. (Als Anfangszustand ist wieder $B_\tau(e)$ und als Menge von Endzuständen ist $\{B_\tau(f)\,|\,f\in E\}$ gewählt). $(\mathscr{F}_\tau)_k=$ $=(B_{\tau\vee\varkappa}, F, \delta_{\tau\vee\varkappa})$ ist aus $k(\mathscr{A}(E))$ und erkennt

$$E'=\bigcup_{f\in E}B_{\tau\vee\varkappa}(f)\supseteqq E^k=\bigcup_{f\in E}B_\varkappa(f).$$

Es ist $\gamma=\gamma\vee\varkappa$, also $\varkappa\leqq\gamma$. Da auch $\tau\leqq\gamma$ gilt, folgt $\tau\vee\varkappa\leqq\gamma$, und damit

$$E'=\bigcup_{f\in E}B_{\tau\vee\varkappa}(f)\subseteqq E^k,\quad\text{also}\quad E'=E^k.$$

Es gilt weiter:

2.3. **Satz.** $E\subseteqq X^*=F$ sei regulär. E^k ist genau dann regulär, wenn es eine Rechtskongruenz τ mit endlichen Index auf F gibt, für die gilt:
(a) E ist Vereinigung von Äquivalenzklassen bzgl. τ
(b) $\forall h\in F$, $\forall f\in E^k$ gilt: $(h,f)\in\tau\Rightarrow h\in E^k$

Beweis. E^k sei regulär. Wähle dann τ wie im vorangehenden Beweis. Es möge umgekehrt ein τ existieren, das die Bedingungen des Satzes erfüllt. Dann wird E^k von (B_τ, F, δ_τ) erkannt.

3. $G(\mathscr{A})$ sei die Automorphismengruppe von $\mathscr{A}=(A, F, \delta)$. Für Untergruppen J von $G(\mathscr{A})$ ist dann ein Quotientenautomat $\mathscr{A}/J$ von $\mathscr{A}$ definiert. Die Zustände von $\mathscr{A}/J$ sind gerade die Transitivitätsklassen von A bzgl. J (vgl. [4]). $\mathscr{A}/G(\mathscr{A})$ ist genau dann kommutativ, wenn jeder Block bzgl. ϱ_k in einer Transitivitätsklasse bzgl. $G(\mathscr{A})$ enthalten ist. Hierbei ist ϱ_k wieder die kleinste kommutative Relation auf A mit S.E. bzgl. $\mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$ sei zyklisch und $a\in A$ ein erzeugendes Element von $\mathscr{A}$. Ist $(a_1, a_2)\in\varrho_k$, dann gibt es Zustände $z_1=a_1, z_2, \ldots, z_l=a_2$ und $g_1, g_2, \ldots, g_l\in F$ mit $z_i=ag_i$ für $i\in[1:l]$ und $g_{i+1}\in k(g_i)$ für $i\in[1:l-1]$. Es ist also $\mathscr{A}/G(\mathscr{A})$ genau dann kommutativ, wenn es für alle $f\in F$ und $g\in k(f)$ ein $\alpha\in G(\mathscr{A})$ mit $\alpha(af)=\alpha(a)f=ag$ gibt. Ist $\mathscr{A}$ transitiv (vgl. [4]), dann ist diese Bedingung sicher erfüllt. Ist $B(a)$ die Transitivitätsklasse bzgl. $G(\mathscr{A})$, in der a liegt, dann kann man diese Bedingung auch folgendermaßen formulieren:

Für alle $f\in F$ und $g\in k(f)$ gibt es ein $a_1\in B(a)$ mit $af=a_1g$.

H sei wie in 1. der Kern des Homomorphismus $\pi\colon G(\mathscr{A})\to G(\mathscr{A}_k)$. Die Transitivitätsklassen von A bzgl. H sind ganz in den Blöcken bzgl. ϱ_k enthalten. Es gilt:

3.1. **Satz.** $\mathscr{A}$ sei streng zusammenhängend und $\mathscr{A}/G(\mathscr{A})$ kommutativ. Dann ist $\mathscr{A}_k=\mathscr{A}/H$.

Beweis. Die Blöcke bzgl. ϱ_k sind in diesem Fall gerade die Transitivitätsklassen von A bzgl. H. Seien dazu $(a_1, a_2)\in\varrho_k$. Es gibt ein $\alpha\in G(\mathscr{A})$ mit $\alpha(a_1)=a_2$. Es genügt jetzt zu zeigen, daß α aus H ist. Da $\mathscr{A}$ streng zusammenhängend ist, ist a_1 ein erzeugendes Element von $\mathscr{A}$. $B=\eta_k(a_1)$ ist dann ein erzeugendes Element von $\mathscr{A}_k$. Für $\bar{\alpha}=$ $=\pi(\alpha)$ gilt:

$\bar{\alpha}(B)=\bar{\alpha}(\eta_k(a_1))=\eta_k(\alpha(a_1))=\eta_k(a_2)=B$, und daher ist $\bar{\alpha}$ die identische Abbildung von $\mathscr{A}_k$.

H besitzt folgende ausgezeichnete Stellung unter allen Untergruppen J von $G(\mathscr{A})$, für die $\mathscr{A}/J$ kommutativ ist. Es gilt (vgl. [1]):

3.2. **Satz.** $\mathscr{A}$ sei streng zusammenhängend und transitiv. J sei eine Untergruppe von $G(\mathscr{A})$, und $\mathscr{A}/J$ sei kommutativ. Dann ist H eine Untergruppe von J.

4. Ist S ein Monoid und σ eine Kongruenz auf S, dann heißt σ genau dann kommutativ, wenn S/σ ein kommutatives Monoid ist, d.h., genau dann, wenn $(s_1s_2, s_2s_1)\in\sigma$ für alle $s_1, s_2\in S$ gilt. Der Durchschnitt ϱ aller kommutativen Kongruenzen auf S ist kommutativ. $S_k = S/\varrho$ heißt maximales kommutatives Bild von S. Mit π_k werde die Projektion von S auf S_k bezeichnet. S_k besitzt folgende universelle Eigenschaft (vgl. [2]):

Ist φ: $S\to\bar{S}$ ein Homomorphismus auf ein kommutatives Monoid $\bar{S}$, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{\varphi}$: $S_k\to\bar{S}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_k"'] & \bar{S} \\ S_k \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Mit $S(\mathscr{A})$ und $S(\mathscr{A}_k)$ bezeichne man die Halbgruppen von $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}_k$. $S(\mathscr{A}_k)$ ist homomorphes Bild von $S(\mathscr{A})$. Mit $S_k(\mathscr{A})$ bezeichne man das maximale homomorphe kommutative Bild von $S(\mathscr{A})$. $S(\mathscr{A}_k)$ ist homomorphes Bild von $S_k(\mathscr{A})$, im allgemeinen sind diese Halbgruppen jedoch nicht isomorph, wie das folgende Beispiel zeigt.

4.1. *Beispiel.* $\mathscr{A}$ sei gegeben durch:

$\mathscr{A}$	a	b
0	a	a
1	b	b

$\mathscr{A}$ ist nicht kommutativ, und $\mathscr{A}_k$ besitzt genau einen Zustand. Die Halbgruppe $S(\mathscr{A})$ von $\mathscr{A}$ ergibt sich zu:

$S(\mathscr{A})$	$\bar{e}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Die Teilmengen $D=\{\bar{0}, \bar{1}\}$ und $E=\{\bar{e}\}$ bestimmen eine Kongruenz ϱ auf $S(\mathscr{A})$. $S(\mathscr{A})/\varrho$ ist kommutativ und gleich $S_k(\mathscr{A})$.

$S_k(\mathscr{A})$	E	D
E	E	D
D	D	D

In diesem Fall ist also $S_k(\mathscr{A})$ nicht isomorph zu $S(\mathscr{A}_k)$.

$\mathcal{A}$ heißt transitiv, wenn es für je zwei Zustände $a_1, a_2 \in A$ ein $\alpha \in G(\mathcal{A})$ mit $\alpha(a_1) = a_2$ gibt. Ist $\mathcal{A}$ transitiv, dann ist auch $\mathcal{A}_k$ transitiv. Seien dazu $\eta_k(a_1)$ und $\eta_k(a_2)$ zwei Zustände von $\mathcal{A}_k$ und $\alpha(a_1)=a_2$ für ein $\alpha \in G(\mathcal{A})$. Dann gilt:

$$\bar{\alpha}(\eta_k(a_1)) = \eta_k(\alpha(a_1)) = \eta_k(a_2) \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha} = \pi(\alpha) \in G(\mathcal{A}_k)$$

4.2. **Satz.** Ist $\mathcal{A}$ zyklisch und transitiv, dann ist $S_k(\mathcal{A})$ isomorph zu $S(\mathcal{A}_k)$.

Beweis. $a \in A$ sei ein erzeugendes Element von $\mathcal{A}$ und $\tau = \varrho_a$. $\mathcal{A}$ ist isomorph zu $\mathcal{F}_\tau$, es genügt daher zu zeigen, daß $S_k(\mathcal{F}_\tau)$ isomorph zu $S(\mathcal{F}_{\tau \vee \varkappa})$ ist. $\mathcal{F}_\tau$ und $\mathcal{F}_{\tau \vee \varkappa}$ sind transitiv und damit zustandsunabhängig (vgl. [4]). Also ist $S(\mathcal{F}_\tau) = F/\tau$ und $S(\mathcal{F}_{\tau \vee \varkappa}) = F/\tau \vee \varkappa$. Die kleinste kommutative Kongruenz auf F/τ werde mit ϱ bezeichnet. Dann ist $S_k(\mathcal{F}_\tau) = (F/\tau)/\varrho$. Mann zeigt leicht (vgl. den Beginn von 2.), daß $(F/\tau)/\varrho$ isomorph zu $F/\tau \vee \varkappa$ ist, womit der Satz bewiesen ist.

4.3. *Beispiel.* $\mathcal{A}$ aus 1.1. erfüllt die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Für $S(\mathcal{A})$ ergibt sich die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$ (vgl. [8]).

$S(\mathcal{A})$	$\bar{e}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\overline{yy}$	$\overline{yx}$	$\overline{y^2x}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\overline{yy}$	$\overline{yx}$	$\overline{y^2x}$
$\bar{y}$	$\bar{y}$	$\overline{yy}$	$\overline{yx}$	$\bar{e}$	$\overline{y^2x}$	$\bar{x}$
$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\overline{y^2x}$	$\bar{e}$	$\overline{yx}$	$\overline{yy}$	$\bar{y}$
$\overline{yy}$	$\overline{yy}$	$\bar{e}$	$\overline{y^2x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\overline{yx}$
$\overline{yx}$	$\overline{yx}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{y^2x}$	$\bar{e}$	$\overline{yy}$
$\overline{y^2x}$	$\overline{y^2x}$	$\overline{yx}$	$\overline{yy}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{e}$

Die Kommutatorgruppe der $\mathfrak{S}_3$ ist $\{\bar{e}, \bar{y}, \overline{yy}\}$. Die Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe wird dann gegeben durch:

$S_k(\mathcal{A})$	E	G
E	E	G
G	G	E

mit $E = \{\bar{e}, \bar{y}, \overline{yy}\}$ und $G = \{\bar{x}, \overline{yx}, \overline{y^2x}\}$. Für die Halbgruppe $S(\mathcal{A}_k)$ ergibt sich

$S(\mathcal{A}_k)$	$\bar{e}$	$\bar{x}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{x}$
$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{e}$

$S(\mathcal{A}_k)$ ist also isomorph zu $S_k(\mathcal{A})$.

5. Für die im folgenden verwendeten Begriffe (reduzierter) Mealyautomat und Automatenabbildung vgl. man [4]. $\mathcal{M} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ sei ein Mealyautomat und $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ der zugehörende (Zustands-) Automat. (A braucht nicht notwendig endlich zu sein. X und Y sollen jedoch immer endliche Alphabete sein.) λ wird auf $A \times X_e^*$ durch $\lambda(a, wx) = \lambda(\delta(a, w), x)$ für alle $a \in A$, $x \in X$ und $w \in X^*$ erweitert. Hierbei ist $X_e^* = X^* - \{e\}$.

5.1. *Definition.* $\mathcal{M}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ heißt fast-kommutativ, wenn $\lambda(a, x_1 x_2 f)= =\lambda(a, x_2 x_1 f)$ für alle $x_1, x_2 \in X, f \in X_e^*$ und $a \in A$ gilt.

Wenn $\mathcal{M}$ fast kommutativ ist, dann gilt natürlich auch $\lambda(a, p x_1 x_2 f)= =\lambda(a, p x_2 x_1 f)$ für alle $p \in X^*$ und für alle a, x_1, x_2 und f wie oben. Der durch folgende Tafel gegebene Mealyautomat ist z.B. fast-kommutativ:

$\mathcal{M}$	a	b
0	(a, x)	(a, x)
1	(b, y)	(b, y)

5.2. **Satz.** $\mathcal{M}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ sei fast-kommutativ, und $\mathcal{M}_r=(A_r, X, Y, \delta_r, \lambda_r)$ sei der zu $\mathcal{M}$ gehörende reduzierte Mealyautomat. Dann ist $\mathcal{A}_r=(A_r, X, \delta_r)$ kommutativ.

Beweis. h sei die Projektion von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}_r$. Falls $\mathcal{A}_r$ nicht kommutativ ist, dann gilt:

$$\exists \bar{z} \in A_r \text{ und } \exists x_1, x_2 \in X \text{ mit } \quad \delta_r(\bar{z}, x_1 x_2) \neq \delta_r(\bar{z}, x_2 x_1).$$

Man wähle ein $z \in A$ mit $h(z)=\bar{z}$ aus. Es sei

$$z_1 = \delta(z, x_1 x_2) \quad \text{und} \quad h(z_1) = \bar{z}_1 = \delta_r(\bar{z}, x_1 x_2)$$

und

$$z_2 = \delta(z, x_2 x_1) \quad \text{und} \quad h(z_2) = \bar{z}_2 = \delta_r(\bar{z}, x_2 x_1)$$

Da $\mathcal{M}_r$ reduziert und $\bar{z}_1 \neq \bar{z}_2$ ist, gibt es ein $f \in X_e^*$ mit $\lambda_r(\bar{z}_1, f) \neq \lambda_r(\bar{z}_2, f)$, woraus sich $\lambda(z_1, f) \neq \lambda(z_2, f)$ oder $\lambda(z, x_1 x_2 f) \neq \lambda(z, x_2 x_1 f)$ ergibt, im Widerspruch zur Voraussetzung über $\mathcal{M}$.

Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich sofort:

5.3. *Korollar.* $\mathcal{M}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ sei fast-kommutativ. Dann gilt:

$$\forall p, q \in X^*, \forall r \in X_e^*, \forall a \in A : \lambda(a, pqr) = \lambda(a, qpr)$$

Ist ein Mealyautomat $\mathcal{M}=(A, X, Y, \delta, \lambda)$ gegeben, dann definiere man für jeden Zustand $a \in A$ eine Abbildung $\lambda_a \colon X^* \to Y^*$ durch

$$\lambda_a(e) = e$$

und

$$\forall u \in X^*, \forall x \in X : \lambda_a(ux) = \lambda_a(u)\, \lambda(\delta(a, u), x).$$

λ_a ist eine Automatenabbildung (vgl. [4]), und jede Automatenabbildung $\alpha \colon X^* \to Y^*$ kann als λ_a für einen geeigneten Mealyautomaten $\mathcal{M}$ und ein geeignetes $a \in A$ dargestellt werden. Man sagt dann, daß $a \in A$ die Abbildung α induziert. Für $w \in X^*$ sei im folgenden $\overline{w}$ der letzte Buchstabe von w $(\bar{e}=e)$.

Ist $\alpha \colon X^* \to Y^*$ eine Automatenabbildung, dann kann man für jedes $p \in X^*$ eine Automatenabbildung $\alpha_p \colon X^* \to Y^*$ durch $\alpha(pu)=\alpha(p)\alpha_p(u)$ für alle $u \in X^*$ definieren. Setzt man $A_\alpha=\{\alpha_p | p \in X^*\}$, $\delta(\alpha_p, x)=\alpha_{px}$ und $\lambda(\alpha_p, x)=\overline{\alpha(px)}$ für alle $\alpha_p \in A_\alpha$ und $x \in X$, dann ist $\mathcal{M}_\alpha=(A_\alpha, X, Y, \delta, \lambda)$ ein reduzierter Mealyautomat, und $\alpha_e=\alpha \in A_\alpha$ induziert α.

5.4. *Definition.* Eine Automatenabbildung $\alpha \colon X^* \to Y^*$ heißt fast-kommutativ, wenn $\overline{\alpha(p x_1 x_2 f)}=\overline{\alpha(p x_2 x_1 f)}$ für alle $x_1, x_2 \in X, f \in X_e^*$ und $p \in X^*$ gilt.

Ist α fast-kommutativ, dann ist der oben definierte Mealyautomat $\mathcal{M}_\alpha$ fast-kommutativ, denn es gilt:

$$\lambda(\alpha_p, x_1x_2f) = \lambda(\delta(\alpha_p, x_1x_2), f) = \lambda(\alpha_{px_1x_2}, f) =$$
$$= \overline{\alpha(px_1x_2f)} = \overline{\alpha(px_2x_1f)} = \lambda(\alpha_p, x_2x_1f)$$

$\mathcal{A}_\alpha = (A_\alpha, X, \delta)$ ist also kommutativ.

Zustände von fast-kommutativen Mealyautomaten induzieren fast-kommutative Automatenabbildungen. Es gilt also:

5.5. **Satz.** Die Automatenabbildung $\alpha: X^* \to Y^*$ ist genau dann fast-kommutativ, wenn sie durch einen Zustand eines fast-kommutativen Mealyautomaten $\mathcal{M} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ induziert wird, für den $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ kommutativ ist.

Summary

To every finite automaton $\mathcal{A} = (A, F, \delta)$ we shall define a minimal commutative congruence ϱ_k and a maximal commutative quotient-automaton $\mathcal{A}_k = (A_k, F, \delta_k)$. After investigating some properties of ϱ_k and A_k we shall give conditions for the regularity of the commutative closure of a regular event. Connections between $S(\mathcal{A})$ and $S(\mathcal{A}_k)$, the semigroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}_k$, will be studied. Finally some remarks are made concerning quasi-commutativity of Mealy-automata and automaton-mappings.

INSTITUT FÜR INFORMATIK
DER TU HANNOVER
D-3 HANNOVER
WELFENGARTEN 1

Literatur

[1] BAYER, R., Automorphism groups and quotients of strongly connected automata and monadic algebras, *IEEE Conf. Rec. on Switching and Automata Theory*, 1966, pp. 282—297.
[2] CLIFFORD, A. H. & G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., v. 1, 1961.
[3] FLECK, A. C., Isomorphism groups of automata, *J. Assoc. Comput. Mach.*, v. 9, 1962, pp. 469—476.
[4] GÉCSEG, F. & I. PEÁK, *Algebraic theory of automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
[5] HARTMANIS, J. & R. E. STEARNS, *Algebraic structure theory of sequential machines*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1966.
[6] OEHMKE, R. H., On the structure of an automaton and its input semigroup, *J. Assoc. Comput. Mach.*, v. 10, 1963, pp. 521—525.
[7] RABIN, M. O. & D. SCOTT, Finite automata and their decision problems, *IBM J. Res. Develop.*, v. 3, 1959, pp. 114—125.
[8] TRAUTH, CH. A., Group-type automata, *J. Assoc. Comput. Mach.*, v. 13, 1966, pp. 170—175.

(Eingegangen am 20. Jan. 1976)