Zur Synthese von DOL-Systemen

Von W. Kämmerer

Herrn Professor László Kalmár zum Gedächtnis

Ein determiniertes von Wechselwirkungen freies Lindenmayer-System (DOL-System) [1, 2, 3] wird durch ein Tripel

$$S=\langle V, P, w_0\rangle$$

definiert. Darin ist

$V=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ eine Menge von Symbolen, das Alphabet,
P eine quadratische Matrix von Rang n, die Produktionsmatrix und
$w_0=a_1^{\alpha_1^0} a_2^{\alpha_2^0} \dots a_n^{\alpha_n^0}$ ein über V gebildetes Wort, das Startwort, wobei α_i^t angibt wievielmal das Symbol a_i in dem Wort w_t vorkommt.

Die Worte der von diesem System bestimmten Sprache werden ausgehend von dem Startwort schrittweise durch einen Ableitungsprozeß gewonnen, der bei jedem Schritt auf alle Symbole des jeweiligen Worts parallel durchgeführt wird.

Von besonderem Interesse im Rahmen biologischer Fragen, wobei die einzelnen Symbole als spezifische Zellen interpretiert werden, ist die Länge des nach t Ableitungsschritten erreichten Worts w_t, die durch die Wachstumsfunktion

$$f_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^t$$

definiert ist.

Für das Syntheseproblem, zu einer vorgegebenen Funktion ein DOL-System zu finden, das diese Funktion als Wachstumsfunktion besitzt, ist vorauszusetzen, daß die vorgelegte Funktion von polynomialem, oder exponentialem oder gemischtem Typa ist. In diesem Fall ist der Übergang von der Wachstumsfunktion zu einer Differenzengleichung, die diese Funktion als Lösung besitzt, stets möglich. Damit ist dann auch die charakteristische Gleichung gewonnen. Die Schwierigkeiten liegen nun in dem erforderlichen Übergang zu einer Matrix, die diese Gleichung als ihre charakteristische Gleichung besitzt und dabei Produktionsmatrix eines DOL-Systems ist.

Nur in einfachsten Fällen gelingt eine direkte Lösung durch Auflösung der resultierenden Gleichungen nach ganzzahligen nichtnegativen Elementen der Matrix.

Für rein polynomiale Wachstumsfunktionen ist ein Weg zur Durchführung der Synthese 1971 von A. L. Szilard [4] über die Erzeugungsfunktion angegeben worden.

Im folgenden soll ein Verfahren aufgezeigt werden, das für eine bestimmte Klasse von Wachstumsfunktionen eine äußerst einfache Konstruktion eines geeigneten DOL-Systems ermöglicht.

Das Wort w_{n-1} mit der Länge f_{n-1} trägt in dem Auftreten der n Symbole $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Informationen über die n Werte der Wachstumsfunktion $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ in Form von Linearkombinationen dieser Werte.

Es liegt nahe, die Klasse von Wachstumsfunktionen zu betrachten, für die sich diese Informationen direkt aus dem Differenzenschema ergeben.

$$\begin{array}{ll} f_0 & \\ & \Delta_0 \\ f_1 & \\ & \Delta_1 \\ f_2 & \\ \vdots & \\ & \Delta_{n-2} \\ f_{n-1} & \\ & \Delta_{n-1} \\ f_n & \end{array}$$

Mit dem Ansatz

$$w_{n-1} = a_1^{f_0}\, a_2^{\Delta_0} a_3^{\Delta_1} \ldots a_n^{\Delta_{n-2}}$$

und folglich

$$w_n = a_1^{f_0+\Delta_0} a_2^{\Delta_1} a_3^{\Delta_2} \ldots a_n^{\Delta_{n-1}}$$

ergibt sich über die vorgelegte Differenzengleichung

$$f_n + q_{n-1} f_{n-1} + \ldots + q_1 f_1 + q_0 f_0 = 0$$

mit

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + \Delta_0 \\ f_2 &= f_0 + \Delta_0 + \Delta_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1} &= f_0 + \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-2} \\ f_n &= f_0 + \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

eine Gleichung für Δ_{n-1}

$$\Delta_{n-1} = Q_1 f_0 + Q_2 \Delta_0 + \ldots + Q_n \Delta_{n-2},$$

wobei als Abkürzungen

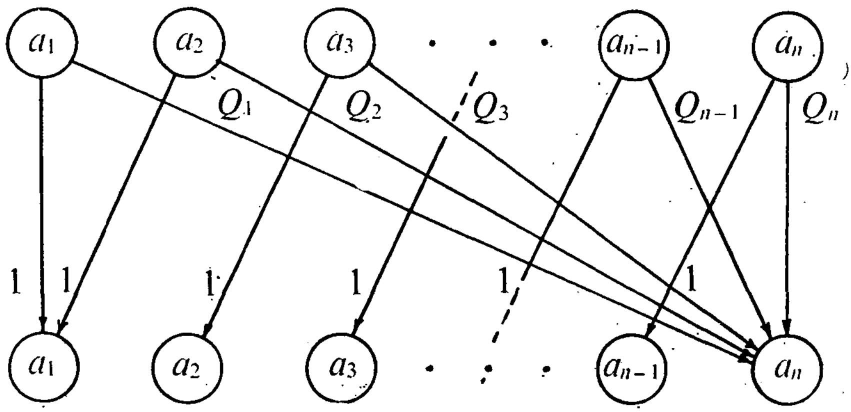
$$\begin{aligned} Q_1 &= -(1 + q_{n-1} + q_{n-2} + \ldots + q_1 + q_0) \\ Q_2 &= -(1 + q_{n-1} + q_{n-2} + \ldots + q_1) \\ &\ldots \\ Q_n &= -(1 + q_{n-1}) \end{aligned}$$

stehen.

Damit erhält man für das Auftreten der einzelnen Symbole in den aufeinanderfolgenden Wörtern w_{n-1} und w_n das folgende Schema:

	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
w_{n-1}	f_0	Δ_0	Δ_1	$\dots$	Δ_{n-3}	Δ_{n-2}
w_n	$f_0+\Delta_0$	Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_{n-2}	$Q_1 f_0+Q_2\Delta_0+\dots+Q_n\Delta_{n-2}$

Daraus lassen sich die folgenden Produktionsregeln gewinnen:



$$
\begin{array}{llll}
a_1 \rightarrow a_1 & & & a_n^{Q_1} \\
a_2 \rightarrow a_1 & & & a_n^{Q_2} \\
a_3 \rightarrow & a_2 & & a_n^{Q_3} \\
\dots & & & \\
a_n \rightarrow & & a_{n-1} & a_n^{Q_n}
\end{array}
$$

Damit diese realisierbar sind, müssen neben den Einlaufwerten f_0, $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-2}$ auch die Größen $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ nichtnegative ganze Zahlen sein.

Ein Beispiel erläutere das äußerst einfache Konstruktionsverfahren.

Die Wachstumsfunktion sei durch die Differenzengleichung

$$f_4-6f_3+5f_2-f_1+f_0=0$$

gegeben. Aus den Koeffizienten erhält man über

$$
\begin{array}{rrrr}
1 & 1 & 1 & 1 \\
-6 & -6 & -6 & -6 \\
5 & 5 & 5 & \\
-1 & -1 & & \\
1 & & & \\
\hline
0 & -1 & 0 & -5
\end{array}
$$

$$Q_1=0 \quad Q_2=1 \quad Q_3=0 \quad Q_4=5$$

und damit die Produktionsregeln eines möglichen DOL-Systems.

$$\begin{array}{llll}
a_1 \to a_1 & & & \\
a_2 \to a_1 & & & a_4 \\
a_3 \to & a_2 & & \\
a_4 \to & & a_3 & a_4^5
\end{array}$$

Zur Überprüfung betrachte man die Produktionsmatrix.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diese liefert als charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0$$

also

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Damit ergibt sich die geforderte Differenzengleichung.

Sind als Einlaufwerte z. B. $f_0=1, f_1=2, f_2=4, f_3=8$ gefordert, so ergibt sich über die Differenzengleichung

$$\begin{array}{ll}
1 & \\
 & 1 \\
2 & \\
 & 2 \\
4 & \\
 & 4 \\
8 &
\end{array}$$

für w_3

$$w_3 = a_1 a_2 a_3^2 a_4^4$$

mit $f_3=8$. Von den daraus ableitbaren Wörtern seien hier nur

$$w_4 = a_1^2 a_2^2 a_3^4 a_4^{21}$$

$$w_5 = a_1^4 a_2^4 a_3^{21} a_4^{107}$$

mit $f_5=136$ angegeben. Diese Werte stehen ebenfalls mit der Differenzengleichung in Übereinstimmung.

Soll die geforderte Folge schon mit ihren Einlaufwerten ableitbar sein, so sind die $(n-1)$ vorhergehenden Funktionswerte aus der Differenzengleichung zu bestimmen. Ergeben sich dabei für das Differenzenschema nicht realisierbare Werte, so kann man das Produktionssystem geeignet erweitern.

Im vorliegenden Beispiel durch

$$x \to y\, u$$
$$y \to z\, u^3$$
$$z \to a_1 a_2 a_3^2 a_4^4$$
$$u \to \emptyset.$$

Damit ergibt sich

$$w_0 = x \qquad \text{mit} \quad f_0 = 1$$
$$w_1 = yu \qquad f_1 = 2$$
$$w_2 = zu^3 \qquad f_2 = 4$$

und

$$w_3 = a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 \qquad f_3 = 8.$$

Der angefügte Teil des Produktionssystems ließe sich etwa als „embryonales" Entwicklungssystem interpretieren.

Literaturverzeichnis

[1] HERMAN, G. T., G. ROZENBERG and A. LINDENMAYER, *Developmental systems and languages*, Amsterdam—Oxford, North-Holland Publishing Company, 1975.

[2] LINDENMAYER, A., Mathematical models for cellular interactions in development, Parts I and II, *J. Theoret. Biol.*, v. 18, 1968, pp. 280—315.

[3] ROZENBERG, G. and A. SALOMAA (eds), *L-systems*, Springer Lecture Notes in Computer Science, No. 15, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag. 1974.

[4] SZILARD, A. L., *Growth functions of LINDENMAYER systems*, Universita of Western Ontario, Computer Science Department, Technical Report No. 4, 1971.

[5] KÄMMERER, W., Eine Einführung in *L*-Systeme und *L*-Sprachen, *Nova acta Leopoldina*, Vorträge anläßlich des Symposiums „Naturwissenschaftliche Linguistik" vom 25. bis 29. Juli 1976, zu Halle (Saale), z. Z. im Druck.

(Eingegangen am 9. März. 1978)