Ein Ansatz zum Entscheidungsverfahren für eine Formelklasse der Prädikatenlogik mit Identität

Von K. Schütte

Herrn Professor László Kalmár zum Gedächtnis

Das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik ohne Identität ist für pränexe Formelklassen vollständig gelöst, nachdem in [6] die Klasse der $\forall\exists\forall$-Formeln als unentscheidbar nachgewiesen wurde. Dabei stellte sich als stärkste entscheidbare Formelklasse diejenige Formelklasse heraus, für die von L. Kalmár [3] im Jahre 1933 ein Entscheidungsverfahren gegeben wurde.

Für die Prädikatenlogik mit Identität ist jedoch die Entscheidbarkeit der entsprechenden Formelklasse ein bisher noch ungelöstes Problem. (In [2] und [4] war irrtümlich erklärt, daß die dort angegebenen Verfahren auch bei Hinzunahme des Gleichheitszeichens zum Ziel führen.)

Im folgenden wird ein Ansatz zur Behandlung des Entscheidungsproblems für die problematische Klasse der $\forall\forall\exists$-Formeln mit Identität entwickelt, aus dem hervorgeht, welche Schwierigkeiten hierbei auftreten und was zu beweisen wäre, falls die betreffende Formelklasse entscheidbar ist.

Wir gehen aus von einer pränexen Formel

$$\forall x \forall y \exists z A(a_1, \ldots, a_m, x, y, z) \tag{1}$$

der Prädikatenlogik mit Identität, in der keine anderen freien Objektvariablen als $a_1, \ldots, a_m$ ($m \geqq 1$) auftreten. Als Primformeln, aus denen sich die Formel $A(a_1, \ldots, a_{m+3})$ mittels aussagenlogischer Junktoren zusammensetzt, dürfen folgende vier Arten auftreten:

1. Die Konstanten $\top$ (verum) und $\perp$ (falsum),
2. Aussagenvariablen,
3. Prädikaten-Primformeln der Gestalt

$$P_j^k a_{i_1} \ldots a_{i_k} \quad (k \geqq 1),$$

wobei P_j^k eine k-stellige Prädikatenvariable ist,

4. Gleichungen $a_i = a_j$.

W sei die Menge der Aussagenvariablen, die in der Formel (1) auftreten, $\{W_1, \ldots, W_t\}$ die Menge aller Teilmengen von W. Für $i = 1, \ldots, t$ sei $A_i(a_1, \ldots, a_{m+3})$

diejenige Formel, die sich aus $A(a_1, \ldots, a_{m+3})$ ergibt, wenn jede Aussagenvariable der Menge W_i durch $\top$ und jede andere Aussagenvariable durch $\perp$ ersetzt wird. Ferner sei

$$C_1 :\equiv \top, \quad C_n :\equiv \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} a_i \neq a_j \quad \text{für} \quad 1 < n \leqq m.$$

Die Formel (1) ist genau dann erfüllbar, wenn es eine positive ganze Zahl $n \leqq m$ und eine Abbildung f von $\{1, \ldots, m\}$ auf $\{1, \ldots, n\}$ gibt, so daß eine der Formeln

$$\forall x \forall y \exists z A_i(a_{f1}, \ldots, a_{fm}, x, y, z) \wedge C_n \quad (i = 1, \ldots, t)$$

erfüllbar ist. Es genügt daher, ein Entscheidungsverfahren für die Erfüllbarkeit von Formeln der Gestalt

$$\forall x \forall y \exists z A^*(a_1, \ldots, a_n, x, y, z) \wedge C_n \quad (n \geqq 1) \tag{2}$$

zu entwickeln, wobei $A^*(a_1, \ldots, a_n, x, y, z)$ eine quantorenfreie Formel ist, die keine Aussagenvariablen und keine anderen Objektvariablen als $a_1, \ldots, a_n, x, y, z$ enthält.

$$B^*(a_1, \ldots, a_n, x, y)$$

sei die Formel

$$A^*(a_1, \ldots, a_n, x, y, x) \vee A^*(a_1, \ldots, a_n, x, y, y) \bigvee_{k=1}^{n} A^*(a_1, \ldots, a_n, x, y, a_k).$$

Für $i = 1, \ldots, n$ definieren wir

$$F_i^*(a_1, \ldots, a_n, x, z) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, a_i, x, z)$$

$$G_i^*(a_1, \ldots, a_n, x) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, a_i, x, x) \bigvee_{k=1}^{n} A^*(a_1, \ldots, a_n, a_i, x, a_k)$$

$$F_{n+i}^*(a_1, \ldots, a_n, x, z) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, x, a_i, z)$$

$$G_{n+i}^*(a_1, \ldots, a_n, x) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, x, a_i, x) \bigvee_{k=1}^{n} A^*(a_1, \ldots, a_n, x, a_i, a_k)$$

$$F_{2n+1}^*(a_1, \ldots, a_n, x, z) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, x, x, z)$$

$$G_{2n+1}^*(a_1, \ldots, a_n, x) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, x, x, x) \bigvee_{k=1}^{n} A^*(a_1, \ldots, a_n, x, x, a_k)$$

Für $i, j = 1, \ldots, n$ definieren wir

$$H_{(i-1)\cdot n+j}^*(a_1, \ldots, a_n, z) :\equiv A^*(a_1, \ldots, a_n, a_i, a_j, z)$$

$$K_{(i-1)\cdot n+j}^*(a_1, \ldots, a_n) :\equiv \bigvee_{k=1}^{n} A^*(a_1, \ldots, a_n, a_i, a_j, a_k).$$

Zur Abkürzung setzen wir $r := 2n+1$ und $s := n^2$. In den Formeln $A^*(a_1, \ldots, a_{n+3})$, $B^*(a_1, \ldots, a_{n+2})$, $F_i^*(a_1, \ldots, a_{n+2})$, $G_i^*(a_1, \ldots, a_{n+1})$ $(i = 1, \ldots, r)$ und $H_i^*(a_1, \ldots, a_{n+1})$, $K_i^*(a_1, \ldots, a_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$ ersetzen wir jede Gleichung $a_j = a_j$ durch $\top$ und jede Gleichung $a_j = a_k$ $(j \neq k)$ durch $\perp$. Hierdurch ergeben sich Formeln $A(a_1, \ldots, a_{n+3})$,

$B(a_1, \ldots, a_{n+2})$, $F_i(a_1, \ldots, a_{n+2})$, $G_i(a_1, \ldots, a_{n+1})$, $H_i(a_1, \ldots, a_{n+1})$ und $K_i(a_1, \ldots, a_n)$, in denen keine Gleichung auftritt. Wir schreiben kurz $A(x, y, z)$, $B(x, y)$, $F_i(x, z)$, $G_i(x)$, $H_i(z)$ und K_i für $A(a_1, \ldots, a_n, x, y, z)$, $B(a_1, \ldots, a_n, x, y)$, $F_i(a_1, \ldots, a_n, x, z)$, $G_i(a_1, \ldots, a_n, x)$, $H_i(a_1, \ldots, a_n, z)$ und $K_i(a_1, \ldots, a_n)$. Ferner definieren wir

$$U_n(x) :\equiv \bigwedge_{i=1}^{n} x \neq a_i .$$

Die Formel (2) ist dann äquivalent mit der Formel

$$\begin{cases} \forall x \forall y \{U_n(x) \wedge U_n(y) \wedge x \neq y \rightarrow \exists z[A(x, y, z) \wedge U_n(z) \wedge x \neq z \wedge y \neq z] \vee B(x, y)\} \\ \bigwedge\limits_{i=1}^{r} \forall x \{U_n(x) \rightarrow \exists z[F_i(x, z) \wedge U_n(z) \wedge x \neq z] \vee G_i(x)\} \\ \bigwedge\limits_{i=1}^{s} \{\exists z[H_i(z) \wedge U_n(z)] \vee K_i\} \wedge C_n . \end{cases} \tag{3}$$

Im folgenden sei F eine Formel der Gestalt (3). Dabei sind die $A(x, y, z)$, $B(x, y)$, $F_i(x, z)$, $G_i(x)$, $H_i(z)$ und K_i quantorenfreie Formeln, die keine Aussagenvariablen, keine Gleichungen und außer den angegebenen Objektvariablen höchstens die Objektvariablen $a_1, \ldots, a_n$ enthalten. n, r und s sind positive ganze Zahlen.

P sei eine nichtleere endliche Menge von Prädikatenvariablen, die alle in F auftretenden Prädikatenvariablen enthält. Ist V eine nichtleere endliche Menge von Objektvariablen, so verstehen wir unter einer *vollständigen V-Konjunktion* eine widerspruchsfreie Konjunktion aus Primformeln und negierten Primformeln, in der jede Prädikaten-Primformel, die sich aus den Prädikatenvariablen der Menge P mit den Objektvariablen der Menge V bilden läßt, genau einmal (negiert oder nichtnegiert) auftritt und in der kein anderes Konjunktionsglied vorkommt. Unter einer *V-Normalform* verstehen wir dann eine Disjunktion

$$\bigvee_{i=1}^{m} A_i \quad (m \geqq 0)$$

aus paarweise inäquivalenten vollständigen V-Konjunktionen $A_1, \ldots, A_m$, wobei es sich im Fall $m=0$ um die Formel $\perp$ handeln soll.

Zu den in (3) auftretenden Formeln $A(x, y, z)$, $B(x, y)$, $F_i(x, z)$, $G_i(x)$, $H_i(z)$ lassen sich nun eine äquivalente $\{a_1, \ldots, a_n, x, y, z\}$-Normalform

$$\bigvee_{j=1}^{m_0} A_j(x, y, z),$$

eine äquivalente $\{a_1, \ldots, a_n, x, y\}$-Normalform

$$\bigvee_{j=1}^{n_0} B_j(x, y),$$

äquivalente $\{a_1, \ldots, a_n, x, z\}$-Normalformen

$$\bigvee_{j=1}^{m_i} F_{ij}(x, z) \quad (i = 1, \ldots, r),$$

äquivalente $\{a_1, \dots, a_n, x\}$-Normalformen

$$\bigvee_{j=1}^{n_i} G_{ij}(x) \quad (i = 1, \dots, r),$$

äquivalente $\{a_1, \dots, a_n, z\}$-Normalformen

$$\bigvee_{j=1}^{p_i} H_{ij}(z) \quad (i = 1, \dots, s)$$

und äquivalente $\{a_1, \dots, a_n\}$-Normalformen

$$\bigvee_{j=1}^{q_i} K_{ij} \quad (i = 1, \dots, s)$$

bilden.

Es läßt sich entscheiden, ob die Formel F in einem Bereich von höchstens $n+1$ Elementen erfüllbar ist. Wir setzen im folgenden voraus, daß sie in keinem Bereich von weniger als $n+2$ Elementen erfüllbar ist. Sie ist dann unerfüllbar, wenn eine der Zahlen m_i+n_i $(i=0, \dots, r)$ oder p_i+q_i $(i=1, \dots, s)$ gleich 0 ist. Wir nehmen nun an, daß alle diese Zahlen positiv sind.

Unter einem *Indexsystem* der Formel F verstehen wir dann ein System

$$M = \langle M_0, \dots, M_r,\ N_0, \dots, N_r,\ P_1, \dots, P_s,\ Q_1, \dots, Q_s\rangle$$

von Teilmengen $M_i \subset \{1, \dots, m_i\}$, $N_i \subset \{1, \dots, n_i\}$, $P_i \subset \{1, \dots, p_i\}$ und $Q_i \subset \{1, \dots, q_i\}$, von denen keine der Mengen $M_i \cup N_i$ $(i=0, \dots, r)$ und $P_i \cup Q_i$ $(i=1, \dots, s)$ leer ist. Bezüglich eines solchen Indexsystems führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Als *M-Hauptglieder* bezeichnen wir die Formeln $A_j(x, y, z)$ $(j \in M_0)$.

Als *M-Doppelglieder* bezeichnen wir die Formeln $B_j(x, y)$, $B_j(y, x)$, $(j \in N_0)$, $F_{ij}(x, y)$, $F_{ij}(y, x)$ $(i=1, \dots, r; j \in M_i)$ und alle Formeln, die sich aus einer der Formeln $A_j(x, y, z)$, $A_j(x, z, y)$, $A_j(y, x, z)$, $A_j(y, z, x)$, $A_j(z, x, y)$, $A_j(z, y, x)$ $(j \in M_0)$ ergeben, wenn alle Konjuktionsglieder, in denen die Variable z auftritt, gestrichen werden.

Als *M-Einzelglieder* bezeichnen wir die Formeln $G_{ij}(x)$ $(i=1, \dots, r;\ j \in N_i)$, $H_{ij}(x)$ $(i=1, \dots, s;\ j \in P_i)$ sowie jede Formel, die sich aus einem M-Doppelglied $D(x, y)$ ergibt, wenn alle Konjunktionsglieder, in denen die Variable y auftritt, gestrichen werden.

Als *M-Grundglieder* bezeichnen wir die Formeln K_{ij} $(i=1, \dots, s; j \in Q_i)$ sowie jede Formel, die sich aus einem M-Einzelglied $E(x)$ ergibt, wenn alle Konjunktionsglieder, in denen die Variable x auftritt, gestrichen werden.

$E_1(x), \dots, E_e(x)$ sei nun eine maximale Folge von paarweise inäquivalenten M-Einzelgliedern. Mit F_M bezeichnen wir dann die Formel

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \forall y \{U_n(x) \wedge U_n(y) \wedge x \neq y \rightarrow \bigvee\limits_{j \in M_0} \exists z [A_j(x, y, z) \wedge U_n(z) \wedge x \neq z \wedge y \neq z] \bigvee\limits_{j \in N_0} B_j(x, y)\} \\ \bigwedge\limits_{i=1}^{r} \forall x \{U_n(x) \rightarrow \bigvee\limits_{j \in M_i} \exists z [F_{ij}(x, z) \wedge U_n(z) \wedge x \neq z] \bigvee\limits_{j \in N_i} G_{ij}(x)\} \\ \bigwedge\limits_{i=1}^{s} \{\bigvee\limits_{i \in P_i} \exists z [H_{ij}(z) \wedge U_n(z)] \bigvee\limits_{j \in Q_i} K_{ij}\} \bigwedge\limits_{i=1}^{e} \exists x [E_i(x) \wedge U_n(x)] \wedge C_n. \end{array}\right. \tag{4}$$

Für quantorenfreie Formeln, A, B gebrauchen wir folgende Bezeichnungen:

$A \subset B$ bedeute, daß A mit einer Teilkonjunktion von B äquivalent ist.

$A \sim B$ bedeute, daß A und B miteinander äquivalent sind.

Die Formel F_M heiße eine *Normalformel*, wenn folgende Bedingungen (I)—(IV) erfüllt sind:

(I) Zu jedem M-Doppelglied $D(x, y)$ gibt es $j \in M_0$ mit $D(x, y) \subset A_j(x, y, z)$ oder $j \in N_0$ mit $D(x, y) \sim B_j(x, y)$.

(II) Zu je zwei inäquivalenten M-Einzelgliedern $E(x)$ und $E^*(x)$ gibt es ein M-Doppelglied $D(x, y)$ mit $E(x) \wedge E^*(y) \subset D(x, y)$.

(III) Zu jedem M-Einzelglied $E(x)$ und jeder Zahl $i \in \{1, \ldots, r\}$ gibt es $j \in M_i$ mit $E(x) \subset F_{ij}(x, z)$ oder $j \in N_i$ mit $E(x) \sim G_{ij}(x)$.

(IV) Alle M-Grundformeln sind miteinander äquivalent.

Ist eine Formel F_M erfüllbar, so ist offenbar auch die Formel F erfüllbar. Umgekehrt gilt: Liegt ein Modell der Formel F vor, so erhält man eine Normalformel F_M durch dasjenige maximale Indexsystem

$$M = \langle M_0, \ldots, M_r, N_0, \ldots, N_r, P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_s \rangle$$

der Formel F, für das alle Formeln

$$\exists x \exists y \exists z [A_j(x, y, z) \wedge U_n(x) \wedge U_n(y) \wedge U_n(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z] \quad (j \in M_0),$$

$$\exists x \exists y [B_j(x, y) \wedge U_n(x) \wedge U_n(y) \wedge x \neq y] \quad (j \in N_0),$$

$$\exists x \exists y [F_{ij}(x, y) \wedge U_n(x) \wedge U_n(y) \wedge x \neq y] \quad (i = 1, \ldots, r;\ j \in M_i),$$

$$\exists x [G_{ij}(x) \wedge U_n(x)] \quad (i = 1, \ldots, r;\ j \in N_i),$$

$$\exists x [H_{ij}(x) \wedge U_n(x)] \quad (i = 1, \ldots, s;\ j \in P_i)$$

und K_{ij} $(i = 1, \ldots, s;\ j \in Q_i)$ in dem betreffenden Modell erfüllt sind. Hiermit ergibt sich:

Satz 1. Die Formel F ist genau dann erfüllbar, wenn es ein Indexsystem M von F gibt, so daß F_M eine erfüllbare Normalformel ist.

Es gibt nur endlich viele Indexsysteme von F, und man kann für jedes Indexsystem M entscheiden, ob F_M eine Normalformel ist. Es kommt also nur darauf an, von einer Normalformel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist.

Im folgenden sei (4) eine Normalformel F_M. Ein M-Einzelglied $E(x)$ heiße *regulär*, wenn es ein M-Doppelglied $D(x, y)$ mit

$$E(x) \wedge E(y) \subset D(x, y)$$

gibt. Jedes andere M-Einzelglied heiße *singulär*.

1. Fall. Jedes M-Einzelglied sei regulär.

In diesem Fall sind die Eigenschaften (I)—(IV) der Normalformel F_M bereits hinreichend für die Erfüllbarkeit der Formel F_M. Es ist leicht zu erkennen, daß die Formel F_M in diesem Fall im Unendlichen erfüllbar ist. Man kann aber auch ähnlich wie in der Prädikatenlogik ohne Identität beweisen, daß die Formel F_M dann ebenfalls in einem geeigneten endlichen Bereich erfüllbar ist.

2. Fall. Mindestens ein M-Einzelglied sei singulär.

Wir wählen dann eine maximale Folge

$$R_1(x), \ldots, R_\varrho(x) \quad (\varrho \geqq 0)$$

von paarweise inäquivalenten regulären M-Einzelgliedern und eine maximale Folge

$$S_1(x), \ldots, S_\sigma(x) \quad (\sigma \geqq 1)$$

von paarweise inäquivalenten singulären M-Einzelgliedern aus.

Es läßt sich entscheiden, ob die Formel F_M in einem Bereich von höchstens $n+\sigma+1$ Elementen erfüllbar ist. Wir setzen im folgenden voraus, daß sie in keinem Bereich von weniger als $n+\sigma+2$ Elementen erfüllbar ist. Sie ist dann unerfüllbar, falls jedes M-Einzelglied singulär ist. Wir nehmen nun an, daß es mindestens ein reguläres M-Einzelglied gibt, also $\varrho \geqq 1$ ist. Dann definieren wir folgende Formeln:

$$R(x) :\equiv \bigwedge_{i=1}^{\varrho} R_i(x), \quad S :\equiv \bigwedge_{u=1}^{\sigma} S_u(a_{n+u})$$

$$A'(x, y, z) :\equiv \bigvee_{j \in M_0} A_j(x, y, z) \wedge R(x) \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge S$$

$$B'(x, y) :\equiv \Big[\bigvee_{j \in M_0} \bigvee_{u=1}^{\sigma} A_j(x, y, a_{n+u}) \vee \bigvee_{j \in N_0} B_j(x, y)\Big] \wedge R(x) \wedge R(y) \wedge S$$

$$\left.\begin{aligned}
F'_u(x, z) &:\equiv \bigvee_{j \in M_0} A_j(a_{n+u}, x, z) \wedge R(x) \wedge R(z) \wedge S \\
G'_u(x) &:\equiv \Big[\bigvee_{j \in M_0} \bigvee_{\substack{v=1 \\ (v \neq u)}}^{\sigma} A_j(a_{n+u}, x, a_{n+v}) \vee \bigvee_{j \in N_0} B_j(a_{n+u}, x)\Big] \wedge R(x) \wedge S \\
F'_{\sigma+u}(x, z) &:\equiv \bigvee_{j \in M_0} A_j(x, a_{n+u}, z) \wedge R(x) \wedge R(z) \wedge S \\
G'_{\sigma+u}(x) &:\equiv \Big[\bigvee_{j \in M_0} \bigvee_{\substack{v=1 \\ (v \neq u)}}^{\sigma} A_j(x, a_{n+u}, a_{n+v}) \vee \bigvee_{j \in N_0} B_j(x, a_{n+u})\Big] \wedge R(x) \wedge S
\end{aligned}\right\} (u = 1, \ldots, \sigma)$$

$$\left.\begin{aligned}
F'_{2\sigma+i}(x, z) &:\equiv \bigvee_{j \in M_i} F_{ij}(x, z) \wedge R(x) \wedge R(z) \wedge S \\
G'_{2\sigma+i}(x) &:\equiv \Big[\bigvee_{j \in M_i} \bigvee_{u=1}^{\sigma} F_{ij}(x, a_{n+u}) \vee \bigvee_{j \in N_i} G_{ij}(x)\Big] \wedge R(x) \wedge S
\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, r)$$

Wir setzen $r' := 2\sigma + r$ und $s' := \binom{\sigma}{2} + r \cdot \sigma + s$. $H'_i(z)$ $(i = 1, \ldots, s')$ seien der Reihe nach folgende Formeln:

$$\bigvee_{j \in M_0} A_j(a_{n+u}, a_{n+v}, z) \wedge R(z) \wedge S \quad (u, v = 1, \ldots, \sigma;\ u \neq v)$$

$$\bigvee_{j \in M_i} F_{ij}(a_{n+u}, z) \wedge R(z) \wedge S \quad (i = 1, \ldots, r;\ u = 1, \ldots, \sigma)$$

$$\bigvee_{j \in P_i} H_{ij}(z) \wedge R(z) \wedge S \quad (i = 1, \ldots, s).$$

K_i' $(i=1, \dots, s')$ seien der Reihe nach folgende Formeln:

$$[\bigvee_{j\in M_0} \bigvee_{\substack{w=1\\(u\neq w\neq v)}}^{\sigma} A_j(a_{n+u}, a_{n+v}, a_{n+w}) \bigvee_{j\in N_0} B_j(a_{n+u}, a_{n+v})]\wedge S \quad (u, v = 1, \dots, \sigma;\ u\neq v)$$

$$[\bigvee_{j\in M_i} \bigvee_{\substack{v=1\\(v\neq u)}}^{\sigma} F_{ij}(a_{n+u}, a_{n+v}) \bigvee_{j\in N_i} G_{ij}(a_{n+u})]\wedge S \quad (i=1, \dots, r;\ u=1, \dots, \sigma)$$

$$[\bigvee_{j\in P_i} \bigvee_{u=1}^{\sigma} H_{ij}(a_{n+u}) \bigvee_{j\in Q_i} K_{ij}]\wedge S \quad (i=1, \dots, s).$$

Mit F' bezeichnen wir dann die Formel

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x\,\forall y\{U_{n+\sigma}(x)\wedge U_{n+\sigma}(y)\wedge x\neq y\to\exists z[A'(x,y,z)\wedge U_{n+\sigma}(z)\wedge x\neq z\wedge y\neq z]\vee B'(x,y)\}\\ \bigwedge_{i=1}^{r'} \forall x\{U_{n+\sigma}(x)\to\exists z[F_i(x,z)\wedge U_{n+\sigma}(z)\wedge x\neq z]\vee G_i'(x)\} \\ \bigwedge_{i=1}^{s'} \{\exists z[H_i'(z)\wedge U_{n+\sigma}(z)]\vee K_i'\} \bigwedge_{i=1}^{\varrho} \exists x[R_i(x)\wedge U_{n+\sigma}(x)]\wedge S\wedge C_{n+\sigma}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Satz 2. Ist F_M eine Normalformel, die genau σ paarweise inäquivalente singuläre M-Einzelglieder und mindestens ein reguläres M-Einzelglied hat und in keinem Bereich von weniger als $n+\sigma+2$ Elementen erfüllbar ist, so ist F_M genau dann erfüllbar, wenn die Formel F' erfüllbar ist.

Falls eine Normalformel F_M nicht den Voraussetzungen des Satzes 2 genügt, läßt sich in einfacher Weise entscheiden, ob F_M erfüllbar ist. Andernfalls wird durch Satz 2 ein Reduktionsverfahren gegeben, das der Normalformel F_M eine „Reduzierte“ F' zuordnet, die jedoch länger als F_M ist. Es ist daher problematisch, ob das Reduktionsverfahren abbricht.

Falls das angegebene Reduktionsverfahren für jede Formel (1) abbricht, ist jede derartige Formel, wenn sie überhaupt erfüllbar ist, bereits im Endlichen erfüllbar. In diesem Fall ist die betrachtete Formelklasse entscheidbar.

Falls das Reduktionsverfahren für eine Formel (1) nicht abbricht, ist diese Formel nur im Unendlichen erfüllbar. Es ist jedoch problematisch, ob sich für jede Formel der betrachteten Formelklasse entweder das Abbrechen des Reduktionsverfahrens nachweisen oder effektiv eine unendliche Reduktionskette angeben läßt.

Für gewisse Teilklassen K und Sy der pränexen Formelklassen $\exists^m\,\forall^2\,\exists^n$ der Prädikatenlogik mit Identität konnte M. Wirsing [7] beweisen, daß das hier angegebene Reduktionsverfahren jeweils nach endlich vielen Schritten abbricht, so daß jede erfüllbare Formel der betreffenden Klassen bereits im Endlichen erfüllbar ist.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D—8 MÜNCHEN
THERESIENSTR. 39

Literatur

[1] GÖDEL, K., Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebn. math. Kolloquium* 2, 1932, p. 27.
[2] GÖDEL, K., Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatsh. Math. Phys.*, v. 40, 1933, pp. 433—443.
[3] KALMÁR, L., Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Ann.*, v. 108, 1933, pp. 466—484.
[4] SCHÜTTE, K., Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Ann.* v. 109, 1934, pp. 572—603.
[5] SCHÜTTE, K., Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln, *Math. Ann.*, v. 110, 1934, pp. 161—194.
[6] KAHR, A. S., E. F. MOORE, and H. WANG, Entscheidungsproblem reduced to the AEA Case, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, v. 48, 1962, pp. 365—377.
[7] WIRSING, M., *Das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Funktionszeichen in Herbrandformeln*, Dissertation, München, *1976*.

(Eingegangen am 22. März 1978)