

О вентильных схемах

О. Б. Лупанов

Вентильные схемы являются одним из основных модельных объектов, на которых изучаются закономерности сложности управляющих систем. Целесообразность их изучения объясняется, с одной стороны, их простотой, и, с другой стороны, возможностью использовать методы и конструкции, разработанные для них, в случае «более сильных» классов управляющих систем.

Вентильную схему можно определить как ориентированный граф, в котором выделено некоторое подмножество вершин — множество полюсов — и эти вершины занумерованы. С каждой вентильной схемой S связывается матрица из нулей и единиц $A = \|a_{ij}\|$ — матрица проводимостей ($a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда в S имеется ориентированный путь из полюса i в полюс j). Очевидно, что матрица проводимостей любой вентильной схемы является транзитивной. Важным классом вентильных схем являются такие, в которых полюса разбиты на два подмножества: «входные» — с номерами $P = \{1, \dots, p\}$ и «выходные» — с номерами $Q = \{p+1, \dots, p+q\}$ и на матрицу проводимостей наложено дополнительное ограничение: $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и либо $i \in P, j \in P$, либо $i \in Q, j \in Q$, либо $i \in Q, j \in P$. В этом случае система проводимостей полностью определяется подматрицей данной матрицы, имеющей p строк и q столбцов; ее обычно и называют матрицей проводимостей.

Одной из основных задач в теории вентильных схем является задача синтеза — построение по данной матрице A вентильной схемы, имеющей в качестве матрицы проводимостей матрицу A . Для решения этой задачи существует тривиальный способ, сводящийся к непосредственному соединению полюсов вентилями. Однако этот способ является неэкономным. Поэтому задача синтеза уточняется — требуется указать метод построения схем, который, с одной стороны, является не очень трудоемким и, с другой стороны, позволяет строить достаточно простые схемы. Для характеристики сложности схем вводится функция $B(p, q)$ — минимальное число вентилях, достаточное для реализации любой матрицы с p строками и q столбцами (функция Шеннона). Пусть $B_r(p, q)$ — аналогичная функция для схем глубины r (глубина схемы — максимальная длина цепи от входа к выходу).

Первые результаты об оценках функций $B(p, q)$ и $B_r(p, q)$ были получены в работе автора [1].

Теорема I [1]. Пусть выполнены условия*

а) $p \rightarrow \infty$;

б) $p \leq q$;

в) $\frac{\log q}{p} \rightarrow 0$.

Тогда

$$B_2(p, q) \sim \frac{pq}{\log q}.$$

Следствие 1. При условиях а), б), в)

$$\frac{pq}{\log(pq)} \lesssim B(p, q) \lesssim \frac{pq}{\log q}.$$

Следствие 2. При условиях а), б), в) и дополнительном условии

г₀) $\frac{\log p}{\log q} \rightarrow 0$

выполняются соотношения

$$B(p, q) \sim B_2(p, q) \sim \frac{pq}{\log q}.$$

Конструкция, использованная в методе синтеза вентиляльных схем глубины 2, легла в основу методов синтеза «более сильных» классов управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, автоматов и т. д.) — см., например, [2].

Уточнение оценок для $B(p, q)$ было получено Э. И. Нечипоруком.

Теорема 2 [3, 4]. Пусть выполнены условия а) и б) теоремы 1, а также условие

г_c) $\lim \frac{\log p}{\log q} = \frac{\mu}{\mu(q-1)+q}$, где μ, q — целые числа, большие нуля.

Тогда

$$B(p, q) \sim B_3(p, q) \sim \frac{pq}{\log(pq)}.$$

Замечание. Условие г_c) включает важный в приложениях случай, когда $p \ll q$.

Случай, когда не выполняется условие в), был исследован В. А. Орловым. Оказалось, что в этом случае функция $B_2(p, q)$ ведет себя «ступенчатообразно». Именно справедливы утверждения.

* Здесь и ниже имеется в виду, что p и q являются функциями некоторого параметра n , и имеются в виду асимптотические соотношения при $n \rightarrow \infty$; \log означает логарифм по основанию 2.

Теорема 3 [5]. Пусть k произвольное фиксированное целое положительное число. Тогда

$$B_2([k \log q], q) \sim (k+1)q.$$

Теорема 4 [5]. Пусть выполнены условия

а) $q \rightarrow \infty$,

в) $\lim \frac{p}{\log q} = \alpha$, причем $\alpha > 1$, α не целое.

Тогда

$$B_2(p, q) \sim [\alpha + 1]q.$$

Теорема 5 [5]. Пусть $q \cong p2^{p-1} - p$. Тогда

$$B_2(p, q) = p2^{p-1} - p + q.$$

Теорема 6 [5]. Пусть выполнено условие а), а также условия

в) $\frac{p}{\log q} \rightarrow 1$,

д) $q \cong p2^{p-1} - p$.

Тогда

$$B_2(p, q) \sim 2q.$$

Теорема 7 [5]. Пусть выполнены условия а), в), а также

д) $q \cong 2(2^p - p - 1)$.

Тогда

$$B(p, q) \sim B_2(p, q) \sim 2q.$$

Теорема 8 [5]. Пусть выполнены условия а) и

д) $q \cong 2(2^p - p - 1)$.

Тогда

$$B(p, q) \sim B_2(p, q) \sim 2 \cdot 2^p + q.$$

Наряду с задачей о реализации произвольных матриц (заданных размеров) рассматривался вопрос о реализации матриц из специальных классов и о реализации конкретных матриц.

Пусть $B_r(p, q, \alpha)$ функция Шеннона для матриц с p строками q столбцами, имеющих αpq единиц. Пусть

$$\alpha^* = \min(\alpha, 1 - \alpha), \quad H(\alpha) = \alpha \log \frac{1}{\alpha} + (1 - \alpha) \log \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Э. И. Нечипорук доказал следующие утверждения.

Теорема 9 [3, 4]. Пусть выполнены условия б), а также

$$а_2) \quad \alpha p \rightarrow \infty,$$

$$е_{\alpha, \varrho}) \quad \frac{\log q}{\log \frac{1}{\alpha}} \rightarrow \varrho, \quad \varrho > 0, \quad \text{целое}$$

$$ж_{\alpha, \varrho}) \quad q\alpha^\varrho \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$B_2(p, q, \alpha) \sim \frac{\alpha p q}{\varrho}.$$

Теорема 10 [12, 4]. Пусть выполнены условия а), б), а также

$$в_2) \quad H(\alpha) \frac{p}{\log q} \rightarrow \infty,$$

$$е_{\infty}) \quad \frac{\log q}{\log \frac{1}{\alpha^*}} \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$B_2(p, q, \alpha) \sim H(\alpha) \frac{pq}{\log q}.$$

Теорема 11 [4]. Пусть выполнены условия а), в₂), е₂), а также

$$г_1) \quad \log p \sim \log q.$$

Тогда

$$B_3(p, q, \alpha) \sim H(\alpha) \frac{pq}{2 \log q}.$$

Пусть $B_2^{\gamma}(p, q)$ — функция Шеннона для не всюду определенных матриц, у которых число определенных элементов — нулей и единиц — равно γpq (остальные $(1-\gamma)pq$ элементов не определены и при реализации матрицы заменяются нулями и единицами так, чтобы реализация была простейшей).

Э. И. Нечипорук установил следующий факт.

Теорема 12 [13, 4]. Пусть выполнены условия а), б), а также

$$в^{\gamma}) \quad \frac{\gamma p}{\log q} \rightarrow \infty,$$

$$е^{\gamma}) \quad \frac{\log q}{\log \frac{1}{\gamma}} \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$B_2^{\gamma}(p, q) \sim \gamma \frac{pq}{\log q}.$$

Конструкция, использованная при доказательстве верхней оценки в этой теореме, применялась впоследствии многими авторами при реализации не всюду определенных булевых функций в различных классах схем (например, [6—9]).

При изучении сложности реализации конкретных матриц наиболее высокие оценки (порядка $p^{3/2}$ в случае квадратных матриц порядка p) были получены Э. И. Нечипоруком («матрицы без прямоугольников» — см. [10]), а также Т. Г. Тарьяном (матрицы Адамара — см. [11]).

Отметим в заключение некоторые задачи, решение которых, по-видимому, будет связано с созданием новых методов.

1. Получить асимптотическое выражение для $B(p, q)$ в случае $\log p \asymp \log q$ (например, при $\frac{\log p}{\log q} \rightarrow \delta$, δ — иррациональное число; т. е. снят σ ограничение g_c) — см. стр. 312).

2. Получить асимптотическую формулу для функции Шеннона $B(p)$ в случае схем, реализующих произвольные транзитивные матрицы с p строками и p столбцами (в которых не выделены специально входы и выходы); оценки

$$c_1 \frac{p^2}{\log p} \cong B(p) \cong c_2 \frac{p^2}{\log p}$$

получаются легко на основе, например, теоремы 1.

3. Построить «эффективно» последовательность матриц порядка p , которые реализуются лишь со сложностью, существенно большей, чем $p^{3/2}$.

Литература

- [1] Лупанов, О. Б., О вентильных и контактно-вентильных схемах, *ДАН СССР*, т. 111, № 6, 1956, стр. 1171—1174.
- [2] Лупанов, О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем, *Проблемы кибернетики*, вып. 10, 1963, стр. 63—97.
- [3] Нечипорук, Э. И., О вентильных схемах, *ДАН СССР*, т. 148, № 1, 1963, стр. 50—53.
- [4] Нечипорук, Э. И., О топологических принципах самокорректирования, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, 1969, стр. 5—102.
- [5] Орлов, В. А., Реализация «узких» матриц вентильными схемами, *Проблемы кибернетики* вып. 22, 1970, стр. 45—52.
- [6] Шоломов, Л. А., О реализации недоопределенных булевых функций схемами из функциональных элементов, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, 1969, стр. 215—226.
- [7] Мадатян, Х. А., О реализации не всюду определенных матриц заданной «густоты» вентильными схемами глубины два, *Кибернетика*, Киев, № 6, 1973, стр. 12—15.
- [8] Липатов, Е. П., Об одном случае неравномерного локального кодирования, *Проблемы кибернетики*, вып. 26, 1973, стр. 95—107.
- [9] RIPPEGER, N., Information theory and the complexity of Boolean functions, *Math. Systems Theory*, v. 10, 1976/77, No. 2, pp. 129—167.
- [10] Нечипорук, Э. И., Об одной булевской матрице, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, 1969, стр. 237—240.
- [11] TARJÁN, T. G., Complexity of lattice-configurations, *Studia Sci. Math. Hungar.*, v. 10, 1975, pp. 203—211.
- [12] Нечипорук, Э. И., О синтезе вентильных схем, *Проблемы кибернетики*, вып. 9, 1963, стр. 37—44.
- [13] Нечипорук, Э. И., О сложности вентильных схем, реализующих булевские матрицы с неопределенными элементами, *ДАН СССР*, т. 163, № 1, 1965, стр. 40—42.

(Поступило 2-ого августа 1979 г.)