Многомерные предельные теоремы для времени ожидания в приоритетных системах $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$

Э. А. Даниелян, Р. Н. Читчян

1°. Введение. По мнению известного специалиста в области применений методов теории массового обслуживания в вычислительных системах Л. Клейнрока [1] «применения теории массового обслуживания для анализа распределения ресурсов и решения задач о потоках данных в вычислительных системах является, по-видимому, единственным доступным специалистам по вычислительной технике методом, который позволяет понять сложные связи в таких системах».

Современные ЭВМ работают в различных режимах (пакетная обработка, разделение времени процессора и т. д.) и в любом из них ряд способов обработки программ формализуются в математических приоритетных моделях.

Даже в одной из первых немарковских приоритетных моделей $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с относительным и абсолютным приоритетом, формализующей прохождение программ r типов на однопроцессорной ЭВМ, точный анализ такой характеристики, как время реакции процессора на программы разных типов, достаточно сложен и приводит к громоздким результатам. В то же время при загрузке процессора, близкой к единице, возникает ситуация сколь угодно длительного ожидания программ начала своего счета. Анализ такой ситуации проводится асимптотическими методами и приводит к доказательству предельных теорем в условиях так называемой «критической загрузки».

Настоящая работа посвящена изучению совместного стационарного распределения времен реакции программ разных типов в условиях «критической загрузки» для моделей с относительным и абсолютным приоритетом.

2°. Описание системы и вспомогательные результаты. В однолинейную систему массового обслуживания поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1>0, \ldots, a_r>0$ соответственно.

Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для i-вызовов имеют функцию распределения (ф. р.) $B_i(t)$, $B_i(+0)=0$ $(i=\overline{1, r})$.

Между вызовами разных потоков установлены приоритеты. Это означает, что при выборе очередного вызова на обслуживание на освободившийся прибор поступает один из вызовов наивысшего приоритета, имеющихся в очереди. Чем меньше индекс потока, тем выше его приоритет.

Внутри каждого приоритетного класса принята дисциплина обслуживания FIFO («первым пришел-первым обслужен»).

Рассматриваются система с относительным приоритетом (схема А) и системы с абсолютным приоритетом (схемы В). В схеме А вызовы обслуживаются без прерываний, а в схемах В обслуживание вызова прерывается поступившим вызовом высшего приоритета, который сразу же начинает обслуживаться. Прерванный вызов либо теряется (схема В2), либо вновь становится в очередь и при новом поступлении на прибор либо дообслуживается (схема В1), либо обслуживается заново (схема В3).

Предполагается, что в начальный момент система свободна от вызовов.

Пусть ϱ_{i1} $(i=\overline{1, r})$-загрузка системы 1-вызовами, ..., i-вызовами. Значения ϱ_{i1}, а также констант ϱ_{i2} $(i=\overline{1, r})$, имеющих смысл второго момента суммарного времени, затрачиваемого на обслуживание поступающих в среднем за единицу времени 1-вызовов, ..., i-вызовов, приведены в [2].

Там же введены понятия i-периода ii-периода, i-цикла и соответствующих им преобразований Лапласа—Стилтьеса (п. Л.—С.) $\pi_i(s)$, $\pi_{ii}(s)$ и $h_i(s)$ $(i=\overline{1, r})$.

Для всех рассматриваемых схем положим $(\operatorname{Re} s \geqq 0;\ i=\overline{1, r})$

$$\mu_1(s) = y_0(s) = v_0(s) = s, \quad \mu_{i+1}(s) = s+\sigma_i-\sigma_i\pi_i(s),$$

$$y_i(s) = s+a_i-a_i\pi_{ii}(s), \quad v_i(s) = s-a_i+a_ih_i(s).$$

В работе [3] доказана следующая

Лемма 1. *Если* $\varrho_{r1}\leqq 1$, то $(\operatorname{Re} s\geqq 0;\ i=\overline{1, r})$

$$\mu_{i+1}(s) = \mu_i(y_i(s)), \tag{2.1}$$

$$y_i(v_i(s)) = v_i(y_i(s)) = s, \tag{2.2}$$

где в схемах А и В1

$$\mu_{i+1}(s) = s+\sigma_i-\sum_{k=1}^{i} a_k\,\beta_k(\mu_{i+1}(s)), \tag{2.3}$$

$$v_i(s) = s-a_i+a_i b_i(\mu_i(s)), \tag{2.4}$$

в схеме В2

$$v_i(s) = s-\mu_i(s)a_i b_i(s+\sigma_{i-1}), \tag{2.5}$$

в схеме В3

$$v_i(s) = s-\mu_i(s)\cdot\frac{a_i b_i(s+\sigma_{i-1})}{\mu_i(s)b_i(s+\sigma_i)+\beta_i(s+\sigma_{i-1})}, \tag{2.6}$$

а $b_i(s)=[1-\beta_i(s)]\cdot s^{-1}$.

Далее, пусть $w_i(t)$ $(i=\overline{1, r})$-виртуальное время ожидания i-вызова в момент t и

$$W(x^{(r)}) = \lim_{t\to+\infty} P\{w_i(t) < x_i\,(i=\overline{1, r})\},$$

$$w(s^{(r)}) = \int\limits_{x^{(r)}=0^{(r)}}^{\infty^{(r)}} \exp\{-(s^{(r)}, x^{(r)})\}d_{x^{(r)}}W(x^{(r)}),$$

где приняты следующие обозначения:

$$x^{(r)} = (x_1, \ldots, x_r), \quad s^{(r)} = (s_1, \ldots, s_r), \quad 0^{(r)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}),$$

$$\infty^{(r)} = (\underbrace{\infty, \cdots, \infty}_{r}), \quad d_{x^{(r)}} = dx_1 \ldots dx_r$$

$(s^{(r)}, x^{(r)})$-скалярное произведение векторов $s^{(r)}$ и $x^{(r)}$.

Обозначим $(i=\overline{1, r})$: $s=s^{(r)}$

$$E_i(s) = a_i \frac{\mu_{i+1}(\theta_{i+1}) - \mu_i(\theta_i)}{\theta_{i+1} - \nu_i(\theta_i)}, \tag{2.7}$$

$$H_i(s) = \frac{\beta_i(\eta_1) - \beta_i(\theta_1)}{\eta_1 - \theta_1}, \tag{2.8}$$

$$V_k^{(i)}(s) = a_k \frac{\beta_i(\mu_k(\theta_k)) - \beta_i(\mu_{k+1}(\theta_{k+1}))}{\theta_{k+1} - \nu_k(\theta_k)}, \quad (k = \overline{1, i-1}) \tag{2.9}$$

$$T_i(s) = \frac{\mu_{i+1}(\theta_{i+1}) - \mu_i(\theta_i)}{\mu_i(\theta_i) - \mu_i(\eta_i)}, \tag{2.10}$$

$$M_i(s) = [\delta_{\nu 2} + \delta_{\nu 3} h_i(\theta_i) \beta_i^{-1}(\sigma_{i-1} + \theta_i)] (\delta_{\nu 2} + \delta_{\nu 3} h_i(\eta_i)) b_i(\sigma_{i-1} + \theta_i), \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} N_i(s) = (\theta_i - \eta_i)^{-1} [\delta_{\nu 2} + \delta_{\nu 3} h_i(\theta_i) \beta_i^{-1}(\sigma_{i-1} + \theta_i)] \cdot [h_i(\eta_i) - \beta_i(\sigma_{i-1} + \theta_i) - \\ - (\delta_{\nu 2} + \delta_{\nu 3} h_i(\eta_i)) \cdot \sigma_{i-1} \pi_{i-1}(\eta_i) \cdot b_i(\sigma_{i-1} + \theta_i)], \end{aligned} \tag{2.12}$$

где индекс ν указывает на номер схемы В, δ_{ij}-символ Кронекера, а величины $\eta_i = \eta_i(s_i, \ldots, s_r)$, $\theta_i = \theta_i(s_i, \ldots, s_r)$ определяются рекуррентным образом

$$\begin{aligned} \eta_{r+1} &= \theta_{r+1} = 0, \\ \eta_i &= s_i + y_i(\eta_{i+1}) \quad (i = \overline{1, r}), \\ \theta_i &= \eta_i - \nu_i(\eta_i) + \theta_{i+1} \quad (i = \overline{1, r}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Обозначим через w_i $(i=\overline{1, r})$ стационарное время ожидания начала обслуживания i-вызова.

Имеет место следующая (см. [3])

Теорема 1. При выполнении условия $\varrho_{r1} < 1$

$$\omega(s) = M \exp\{-(w, s)\} = \varrho_r(1 + \Phi(s)), \tag{2.14}$$

где $\Phi(s)$ определяется соотношениями:

схема А

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{r} \Psi_i(s) \cdot E_i(s), \tag{2.15}$$

$$\Psi_i(s) = H_i(s) + \sum_{k=1}^{i-1} \Psi_k(s) V_k^{(i)}(s), \quad (i = \overline{1, r}) \tag{2.16}$$

схема B1

$$1+\Phi_i(s) = \prod_{k=1}^{i}\left(1+T_k(s)\right), \quad (i=\overline{1,r}) \tag{2.17}$$

схемы Bν ($\nu=2, 3$)

$$\Phi_i(s) = \Phi_{i-1}(s)\left[1+E_i(s)\cdot M_i(s)\right]+E_i(s)N_i(s), \quad (i=\overline{1,r}) \tag{2.18}$$

здесь $\Phi(s)=\Phi_r(s)$, $\Phi_0(s)\equiv 0$.

3°. Пусть в схемах А и B1 для п. Л.—С. $\beta_i(s)$ $(i=\overline{1,r})$ длительности обслуживания i-вызова при $s^+\to 0$ ($\operatorname{Re} s\geqq 0$; $s\to 0$) имеет место разложение

$$\beta_i(s) = 1-\beta_{i1}\cdot s+\alpha_i^{(\beta)} s^{\gamma_{(i)}}\left(1+\varphi_{(i)}(s)\right), \tag{3.1}$$

где $1<\gamma_{(i)}\leqq 2$, $\alpha_i^{(\beta)}$-некоторая положительная постоянная, $\beta_{i1}=\int\limits_0^\infty t\,dB_i(t)$, а $\varphi_{(i)}(s)=0_s(1)$.

В схемах же B2 и B3 соответствующее разложение предполагаем выполненным лишь для первого потока $c\gamma_{(1)}=\gamma$.

Положим $(i=\overline{1,r})$:

$$\gamma_i = \min\left(\gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(i)}\right), \quad L_i = \{k\leqq i:\ \gamma_{(k)}=\gamma_i\}, \quad \lambda_i = \gamma_i(\gamma_i-1)^{-1},$$

$$B_i = \sum_{k\in L_i} a_k\alpha_k^{(\beta)}, \quad B_1 = B.$$

Лемма 2 (см. [4]). Пусть выполнены разложения (3.1). Тогда при $s^+\to 0$ и $\varrho_{i1}<1$ справедливы следующие асимптотические разложения

$$\mu_{i+1}(s) = \varrho_i^{-1}s-\varrho_i^{-(\gamma_i+1)}K_i s^{\gamma_i}+0(s^{\gamma_i}), \tag{3.2}$$

$$y_i(s) = \varrho_{i-1}\cdot\varrho_i^{-1}\{s-\varrho_i^{-\gamma_i}P_i s^{\gamma_i}\}+0(s^{\gamma_i}), \tag{3.3}$$

$$v_{i+1}(s) = \varrho_{i+1}\varrho_i^{-1}s+\varrho_i^{-\gamma_{i+1}}P_{i+1}s^{\gamma_{i+1}}+0(s^{\gamma_{i+1}}), \tag{3.4}$$

где $P_i=K_i-K_{i-1}\dfrac{\varrho_i}{\varrho_{i-1}}\chi(\gamma_i=\gamma_{i-1})$, $\chi(A)$-индикатор события A, а

$$K_i = \begin{cases} B_i, & \text{если } \gamma_i<2,\\ 2\varrho_{i2}, & \text{если } \gamma_i=2.\end{cases}$$

Будем говорить, что система массового обслуживания $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ находится в условиях критической загрузки, если $\varrho \overset{\mathrm{def}}{=} 1-\varrho_{r1}\downarrow 0$.

Условия критической загрузки создаются следующим образом.

Пусть при $\varrho\downarrow 0$ ф. р. $B_i(t)$ $(i=\overline{1,r})$ фиксированы и существуют пределы $(i, j=\overline{1,r})$

$$\bar{c}_{ij} = \lim_{\varrho\downarrow 0} c_{ij},\ c_{ij} = \varrho_i\varrho_j^{-1}(\bar{c}_i=\bar{c}_{ii-1},\ \varrho_i=1-\varrho_{i1},\ \varrho_0=1).$$

Далее, пусть для индексов p_u $(1\leqq p=p_1<p_2<\ldots<p_m=r)$ и только для них $\bar{c}_{p_u}=0$ $(u=\overline{1,m};\ m\leqq r)$. Следовательно, у первых $p-1$ потоков суммарная

загрузка ϱ_{p-11} стремится при $\varrho\downarrow 0$ к числу, меньшему единицы ($\bar{\varrho}_{p-1}>0$), а ϱ_{p1}-к единице.

Не ограничивая общности, положим, что параметры $a_1, \dots, a_{p-1}$ фиксированы и равны своим предельным при $\varrho\downarrow 0$ значениям. Поэтому считаем, что в условиях критической загрузки меняются только величины $a_p, \dots, a_r$.

Обозначим:

$$\bar{K}_p = \lim_{\varrho\downarrow 1} K_i = \begin{cases} 2\bar{\varrho}_{p2}, \text{ если } \gamma_p = 2 \\ B_{p-1}+\bar{\varrho}_{p-1}\cdot\beta_{p1}^{-1}\alpha_p^{(\beta)}\chi(\gamma_{(p)}=\gamma_{p-1}), \text{ если } \gamma_p=\gamma_{p-1}<2, \\ \bar{\varrho}_{p-1}\cdot\beta_{p1}^{-1}\alpha_p^{(\beta)}, \text{ если } \gamma_p\neq\gamma_{p-1}, \gamma_{p-1}<2, \gamma_p<2. \end{cases}$$

4°. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основных результатов, сделаем ряд полезных замечаний.

Рассмотрим вначале схемы А и В1. Подставляя в (2.3) разложения функций $\beta_j(s)$ $(j=\overline{1, i})$ при $s^+\to 0$, получаем

$$\mu_{i+1}(s)=\varrho_i^{-1}s-\varrho_i^{-(\gamma_i+1)}K_i\{\mu_{i+1}(s)\}^{\gamma_i}\big(1+\varphi_i(\mu_{i+1}(s))\big), \tag{4.1}$$

где

$$K_i\varphi_i\big(\mu_{i+1}(s)\big)=\sum_{j\in L_i}\varphi_{(j)}\big(\mu_{i+1}(s)\big)a_j\alpha_j^{(\beta)}+\sum_{\substack{j\notin L_i\\ j\leq i}}a_j\alpha_j^{(\beta)}\mu_{(+)}^{\gamma_{(j)}-\gamma_i}(s)\big(1+\varphi_{(j)}(\mu_{i+1}(s))\big).$$

Очевидно, что для любого $\alpha\to 0$ при $\varrho_i\downarrow 0$ имеем $\mu_{i+1}(\alpha)\to 0$. Поскольку при $\varrho\downarrow 0$ функции $\beta_j(s)$ $(j=\overline{1, i})$ фиксированы, а $\varphi_{(j)}(s)$ фигурируют только в разложениях для $\beta_j(s)$, т. е. не зависят от загрузок, и стремятся к нулю при $s^+\to 0$, то при $\varrho_i\downarrow 0$

$$\varphi_i\big(\mu_{i+1}(\varrho_i^{\lambda_p}s)\big)=0_{\varrho_i}(1).$$

При фиксированных загрузках и $s^+\to 0$ из соотношения (3.2) следует, что

$$\mu_{i+1}(s)=\varrho_i^{-1}s-\varrho_i^{-(\gamma_i+1)}K_is^{\gamma_i}\big(1+\psi_i(s)\big), \tag{4.2}$$

где $\psi_i(s)=0_s(1)$.

Пусть и в нашем случае переменных загрузок $\mu_{i+1}(s)$ задается соотношением (4.2). Тогда имеет место

Лемма 3. Для схем А и В1 равномерно по достаточно малым s при $\varrho\downarrow 0$

$$\max_{0\leq u\leq\varrho_i^{\lambda_i}s}|\psi_i(u)|=0_{\varrho_i}(1)\quad(i\geq p).$$

Доказательство. Сравнивая соотношения (4.1) и (4.2), приходим к следующей связи между функциями $\varphi_i(s)$ и $\psi_i(s)$:

$$\psi_i(s)=\{\varrho_is^{-1}\mu_{i+1}(s)\}^{\gamma_i}\cdot\big[1+\varphi_i\big(\mu_{i+1}(s)\big)\big]-1. \tag{4.3}$$

Обозначим $(i\geq p)$:

$$\varkappa_i(\varrho_i)=\frac{\mu_{i+1}(\varrho_i^{\lambda_i}s)}{\varrho_i^{\lambda_i-1}\cdot s}.$$

Тогда при $\varrho\downarrow 0$, подставив в (4.3) вместо s выражение $\varrho_i^{\lambda_i}s$, где s-достаточно мало, имеем:

$$\psi_i(\varrho_i^{\lambda_i}s) = \varkappa_i^{\gamma_i}(\varrho_i)\left(1+0_{\varrho_i}(1)\right)-1.$$

Покажем, что равномерно по достаточно малым s при $\varrho\downarrow 0$

$$\varkappa_i(\varrho_i) = 1+0_{\varrho_i}(1).$$

Запишем для этого соотношение (2.3) в виде:

$$\mu_{i+1}(s) = s\cdot\left\{1-\sum_{j=1}^{i} a_j b_j\left(\mu_{i+1}(s)\right)\right\}^{-1}. \tag{4.4}$$

В силу неравенств

$$0 \leqq \mu_{i+1}(s) \leqq s(1+\sigma_i\pi_{i1}) = \frac{s}{\varrho_i}$$

из (4.4) выводим двусторонние оценки для функции $\mu_{i+1}(s)$:

$$s\cdot\left\{1-\sum_{j=1}^{i} a_j b_j(s\varrho_i^{-1})\right\}^{-1} \leqq \mu_{i+1}(s) \leqq s\varrho_i^{-1}, \tag{4.5}$$

или, после подстановки вместо s величины $\varrho_i^{\lambda_i}s$, где s-достаточно мало,

$$\frac{\varrho_i}{1-\sum\limits_{j=1}^{i} a_j b_j(\varrho_i^{\lambda_i-1}s)} = \frac{\varrho_i}{\varrho_i+0(\varrho_i)} \leqq \varkappa_i(\varrho_i) \leqq 1.$$

Последнее соотношение при $\varrho\downarrow 0$ дает, что $\varkappa_i(\varrho_i)\to 1$, т. е. $\psi_i(\varrho_i^{\lambda_i}s)=0_{\varrho_i}(1)$ равномерно по достаточно малым s.

Подставив же вместо s выражение $\varrho_i^{\lambda_i}\cdot\alpha\cdot s$, где $\alpha\to 0$ при $\varrho\downarrow 0$, в соотношение (4.5), убеждаемся в справедливости леммы 3 для всех $0\leqq u\leqq\varrho_i^{\lambda_i}s$. Лемма 3 доказана.

Перейдем к рассмотрению схем B2 и B3.

Лемма 4. Для схем $\mathrm{B}\nu$ ($\nu=2, 3$) при $s^+\to 0$ равномерно по ϱ_i ($i\geqq p$)

$$v_i(s) = s-(\varrho_{i-1}-\varrho_i)\mu_i(s)+o\left[\left(\mu_i(s)-s\right)^2+s^2\right]. \tag{4.6}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции ($0\leqq z\leqq 1$):

$$\varphi_i(z, s) = s-a_i(s+z)b_i(s+\sigma_{i-1})\begin{cases}1, & \text{для схемы B2,}\\ [(s+z)\beta_i(s+\sigma_{i-1})+\beta_i(s+\sigma_{i-1})]^{-1}, & \text{для B3.}\end{cases}$$

Отметим, что $v_i(s)=\varphi_i\left(\mu_i(s)-s, s\right)$. Поскольку функция $\varphi_i(z, s)$ аналитична в окрестности S точки ($z=0, s=0$) как функция двух переменных, то внутри S она разложима в ряд Тейлора

$$\varphi_i(z, s) = \varphi_i(0, 0)+\frac{\partial\varphi_i(0, 0)}{\partial z}\cdot z+\frac{\partial\varphi_i(0, 0)}{\partial s}s+A_i(z, s), \tag{4.7}$$

где $(0<\theta<1)$

$$A_i(z, s) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi_i(\theta z, \theta s)}{\partial z^2} z^2 + 2z\cdot s\frac{\partial^2\varphi_i(\theta z, \theta s)}{\partial z\partial s} + \frac{\partial^2\varphi_i(\theta z, \theta s)}{\partial s^2} s^2\right].$$

Поскольку a_i входит в $\varphi_i(z, s)$ линейным образом, а при $\varrho_i\downarrow 0$ параметры $a_1, \ldots, a_i$ ограничены в совокупности, то равномерно по ϱ_i имеем $A_i(z, s) = o(z^2+s^2)$. Выберем s настолько малым, чтобы $(\mu_i(s)-s, s)\in S$. Подставив в соотношение (4.7) вместо z выражение $\mu_i(s)-s$, приходим к (4.6). Лемма 4 полностью доказана.

5°. При доказательство основного результата настоящей работы существенно используются асимптотические разложения функций $\mu_{i+1}(s)$, $y_i(s)$ и $v_i(s)$ в условиях критической загрузки, которые представляют самостоятельный интерес при асимптотическом исследовании различных характеристик многих приоритетных моделей.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3.1). При $\varrho\downarrow 0$ для всех схем А и В справедливы следующие равномерные по достаточно малым s асимптотические разложения $(i=\overline{p, r})$:

$$\mu_{i+1}(\varrho_i^{\lambda_p} s) = \varrho_i^{\lambda_p-1} \Lambda(s)(1+0(1)), \tag{5.1}$$

$$\varrho_i^{\lambda_p} s - v_{i+1}(\varrho_i^{\lambda_p} s) = \varrho_i^{\lambda_p}(1-c_{i+1})\Lambda(s)(1+0(1)), \tag{5.2}$$

$$y_i(\varrho_i^{\lambda_p} s) - \varrho_i^{\lambda_p} s = \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}(1-c_i)\Lambda(s)(1+0(1)), \tag{5.3}$$

где $\Lambda(s)$-решение уравнения

$$z+\overline{K}_p z^{\gamma_p} = s, \tag{5.4}$$

удовлетворяющее начальному условию $\Lambda(0)=0$.

Доказательство проведем математической индукцией по k.

При $k=p$ справедливость теоремы 2 следует из таких рассуждений. При $s^+\to 0$ в силу леммы 2 и условия $\varrho_{p-1}<1$ имеем

$$v_p(s) = c_p\cdot s + \varrho_{p-1}^{-\gamma_p} P_p s^{\gamma_p}(1+f_{p-1}(s)), \tag{5.5}$$

где $f_{p-1}(s) = 0_s(1)$.

Поскольку $f_{p-1}(s)$ не зависит от параметров $a_p, \ldots, a_r$, то подставляя вместо s выражение $\varrho_{p-1}\varrho^{\lambda_p-1}s$, где s-достаточно мало, при $\varrho\downarrow 0$ с учетом $\bar{c}_p=0$ из (5.5) имеем

$$v_p(\varrho_{p-1}\varrho_p^{\lambda_p-1}s) = \varrho_p^{\lambda_p}(s+\overline{K}_p s^{\lambda_p})(1+0(1)). \tag{5.6}$$

Тогда из соотношения (2.2) при $\varrho\downarrow 0$ следует, что

$$\varrho_{p-1}\varrho_p^{\lambda_p-1}s = y_p(v_p(\varrho_{p-1}\varrho_p^{\lambda_p-1}s)) = y_p(\varrho_p^{\lambda_p}(s+\overline{K}_p s^{\gamma_p})(1+0(1))). \tag{5.7}$$

Рассмотрим неявное уравнение

$$F(z, s) = z+\overline{K}_p z^{\gamma_p} - s = 0.$$

Поскольку $F(0,0)=0$, $F_z'(z,s)\neq 0$, то по теореме о неявной функции существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $\Lambda(s)$, удовлетворяющая начальному условию $\Lambda(0)=0$.

Так как

$$s = \Lambda(s)+\overline{K}_p\Lambda^{\gamma_p}(s) \tag{5.8}$$

то, положив $s=\Lambda(\tau)$ в соотношение (5.7), получаем

$$y_p\left(\varrho_p^{\lambda_p}\tau(1+0(1))\right) = \varrho_{p-1}\varrho_p^{\lambda_p-1}\Lambda(\tau),$$

откуда, пользуясь монотонностью функции $y_p(s)$, с помощью стандартной техники оценок нетрудно вывести, что

$$y_p(\varrho_p^{\lambda_p}\tau) = \varrho_{p-1}\varrho_p^{\lambda_p-1}\Lambda(\tau)\left(1+0(1)\right), \tag{5.9}$$

которое совпадает с разложением (5.3) с $i=p$ и $\bar{c}_p=0$.

Далее, при $s^+\to 0$ из соотношения (3.2) следует

$$\mu_p(s) = \varrho_{p-1}^{-1}s-\varrho_{p-1}^{-\gamma_{p-1}-1}K_{p-1}s^{\gamma_p-1}\left(1+\psi_{p-1}(s)\right).$$

Поскольку функция $\psi_{p-1}(s)$ не зависит от параметров $a_p,\dots,a_r$, то из соотношения (2.1) при $\varrho\downarrow 0$ получаем:

$$\begin{aligned}\mu_{p+1}(\varrho_p^{\lambda_p}s) &= \varrho_{p-1}^{-1}y_p(\varrho_p^{\lambda_p}s)-\varrho_{p-1}^{-\gamma_{p-1}-1}K_{p-1}y_p^{\gamma_{p-1}}(\varrho_p^{\lambda_p}s)\cdot\left\{1+\psi_{p-1}\left(y_p(\varrho_p^{\lambda_p}s)\right)\right\} = \\ &= \varrho_p^{\gamma_p-1}\Lambda(s)\left(1+0(1)\right),\end{aligned} \tag{5.10}$$

т. е. соотношение (5.1) доказано в случае $i=p$.

Соотношение (5.2) для схем B2 и B3 доказывается непосредственной подстановкой в (4.6) вместо s величины $\varrho_p^{\lambda_p}s$, где s-достаточно мало, с использованием (5.10). Законность указанных действий гарантируется равномерностью по ϱ_p соотношения (4.6).

Докажем, что (5.7) имеет место при $i=p$ и для схем A и B1. Из формул (2.4) при $s^+\to 0$ следует, что

$$s-v_{p+1}(s) = a_{p+1}\beta_{p+1}\,\mu_{p+1}(s)-a_{p+1}\alpha_{p+1}^{(\beta)}\mu_{p+1}^{\gamma_{p+1}}(s)\left(1+\varphi_{(p+1)}(\mu_{p+1}(s))\right). \tag{5.11}$$

Будем определять $v_{p+1}(s)$ по последней формуле и при переменных загрузках. Ввиду того, что функция $\varphi_{(p+1)}(s)$ не зависит от параметров $a_p,\dots,a_r$, при $\varrho\downarrow 0$ имеем

$$\varphi_{(p+1)}\left(\mu_{p+1}(\varrho_p^{\lambda_p}s)\right) = \varphi_{(p+1)}\left(\varrho_p^{\lambda_p-1}\Lambda(s)(1+0(1))\right) = 0_{\varrho_p}(1).$$

Тогда при $\varrho_p\downarrow 0$ из соотношения (5.11) следует, что

$$\begin{aligned}\varrho_p^{\lambda_p}s-v_{p+1}(\varrho_p^{\lambda_p}s) &= \varrho_p^{\lambda_p}(1-c_{p+1})\Lambda(s)\left(1+0(1)\right)- \\ &-\varrho_p^{(\lambda_p-1)\gamma_{(p+1)}+1}(1-c_{p+1})\,\alpha_{p+1}^{(\beta)}\beta_{p+1}^{-1}\Lambda^{\gamma_{(p+1)}}(s)\left(1+0(1)\right).\end{aligned}$$

Сравним порядки обоих слагаемых в правой части полученного соотношения:

$$\frac{\varrho_p^{(\lambda_p-1)\gamma_{(p+1)}+1}(1-c_{p+1})}{\varrho_p^{\lambda_p}(1-c_{p+1})} = \varrho_p^{(\lambda_p-1)(\gamma_{(p+1)}-1)}\to 0.$$

Следовательно, формула (5.2) для схем А и B1 при $i=p$ верна.

Допустим, что утверждения теоремы 2 верны при $k=\overline{p+1, i-1}$ и докажем их справедливость при $k=i$.

Сначала получим разложение для функции $y_i(s)$.

а) Пусть $\bar{c}_i=0$. Тогда из предположения индукции при $\varrho\downarrow 0$

$$v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s) = \varrho_{i-1}^{\lambda_p}[s-(1-c_i)\Lambda(s)](1+0(1)) =$$
$$= \varrho_{i-1}^{\lambda_p}[c_i s+(1-c_i)\cdot\overline{K}_p\Lambda^{\gamma_p}(s)](1+0(1)).$$

Пользуясь равномерностью по достаточно малым s при $\varrho\downarrow 0$, подставим вместо s выражение $c_i^{\lambda_p-1}s$.

Воспользовавшись легко доказуемым соотношением

$$\lim_{s\downarrow 0} s^{-1}\Lambda(s) = 1, \tag{5.12}$$

получаем, что (ср. с (5.6))

$$v_i(\varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}s) = \varrho_i^{\lambda_p}(s+\overline{K}_p s^{\gamma_p})\cdot(1+0(1)), \tag{5.13}$$

откуда, аналогично получению соотношения (5.9), при $\varrho\downarrow 0$ имеем

$$y_i(\varrho_i^{\lambda_p}s) = \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)(1+0(1)). \tag{5.14}$$

б) Рассмотрим теперь случай $\bar{c}_i\neq 0$. Из предположения индукции при $\varrho\downarrow 0$ имеем:

$$v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s) = \varrho_i^{\lambda_p}\tau(1+0(1)), \tag{5.15}$$

где τ определяется из равенства

$$c_i^{\lambda_p}\tau = s-(1-c_i)\Lambda(\tau).$$

Покажем, что

$$\Lambda(s) = c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(\tau). \tag{5.16}$$

Действительно,

$$c_i^{\lambda_p}\cdot\tau = \Lambda(s)+\overline{K}_p\Lambda^{\gamma_p}(s)-(1-c_i)\Lambda(s) = = c_i\Lambda(s)+\overline{K}_p\Lambda^{\gamma_p}(s),$$

откуда следует, что

$$\tau = \frac{\Lambda(s)}{c_i^{\lambda_p-1}}+\overline{K}_p\left[\frac{\Lambda(s)}{c_i^{\lambda_p-1}}\right]^{\gamma_p}. \tag{5.17}$$

Поскольку

$$z = \Lambda(z+\overline{K}_p z^{\gamma_p}), \tag{5.18}$$

то из соотношения (5.17) имеем

$$\Lambda(\tau) = \Lambda\left(\frac{\Lambda(s)}{c_i^{\lambda_p-1}}+\overline{K}_p\left(\frac{\Lambda(s)}{c_i^{\lambda_p-1}}\right)^{\gamma_p}\right) = \frac{\Lambda(s)}{c_i^{\lambda_p-1}},$$

что и доказывает справедливость (5.16).

Теперь из предположения индукции и соотношения (2.2) при условиях критической загрузки имеем

$$y_i\big(v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s)\big)-v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s) = \varrho_{i-1}^{\lambda_p}s-v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s) = \varrho_{i-1}^{\lambda_p}(1-c_i)\Lambda(s)\big(1+0(1)\big). \quad (5.19)$$

С другой стороны, из (5.14) следует, что

$$y_i\big(v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s)\big)-v_i(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}s) = y_i\big(\varrho_i^{\lambda_p}\tau(1+0(1))\big)-\varrho_i^{\lambda_p}\tau\big(1+0(1)\big).$$

Используя соотношения (5.19) и (5.16), выводим следующее асимптотическое равенство:

$$y_i\big(\varrho_i^{\lambda_p}\tau(1+0(1))\big)-\varrho_i^{\lambda_p}\tau\big(1+0(1)\big) = \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}(1-c_i)\Lambda(\tau)\cdot\big(1+0(1)\big),$$

откуда следует формула (5.3) при $\bar{c}_i\neq 0$.

Таким образом, при $\bar{c}_i=0$ разложение $y_i(\varrho_i^{\lambda_p}s)$ при $\varrho\downarrow 0$ определяется по формуле (5.14), а при $\bar{c}_i\neq 0$-по (5.3). Но, поскольку при $\bar{c}_i\neq 0$

$$\frac{\varrho_i^{\lambda_p}}{\varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}} = c_i \to 0,$$

то оба результата можно записать в форме (5.3).

Для доказательства (5.1) также рассмотрим два случая.

а) $\bar{c}_i=0$. Тогда, исходя из предположения индукции и соотношений (2.1), (5.14) и (5.12), выводим

$$\mu_{i+1}(\varrho_i^{\lambda_p}s) = \mu_i\big(y_i(\varrho_i^{\lambda_p}s)\big) = \mu_i\big(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)(1+0(1))\big) =$$
$$= \varrho_{i-1}^{\lambda_p-1}\Lambda\big(c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)(1+0(1))(1+0(1))\big) = \varrho_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)\big(1+0(1)\big).$$

б) $\bar{c}_i\neq 0$. Покажем вначале, что

$$c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s) = \Lambda\big(c_i^{\lambda_p}s+c_i^{\lambda_p-1}(1-c_i)\Lambda(s)\big). \quad (5.20)$$

Действительно, воспользовавшись равенствами (5.18) и (5.8), выводим:

$$c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s) = \Lambda\big(c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)+\bar{K}_p c_i^{\lambda_p}\Lambda^{\gamma_p}(s)\big) =$$
$$= \Lambda\big(c_i^{\lambda_p}(\Lambda(s)+\bar{K}_p\Lambda\,\gamma_p(s))+c_i^{\lambda_p-1}(1-c_i)\Lambda(s)\big) = \Lambda\big(c_i^{\lambda_p}s+c_i^{\lambda_p-1}(1-c_i)\Lambda(s)\big),$$

что доказывает справедливость (5.20).

Поэтому, исходя из (2.1), (5.1) и (5.20), при $\varrho\downarrow 0$ выводим:

$$\mu_{i+1}(\varrho_i^{\lambda_p}s) = \mu_i\big(\varrho_{i-1}^{\lambda_p}(c_i^{\lambda_p}s+c_i^{\lambda_p-1}(1-c_i)\Lambda(s)(1+0(1)))\big) =$$
$$= \varrho_{i-1}^{\lambda_p-1}c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)\big(1+0(1)\big) = \varrho_i^{\lambda_p-1}\Lambda(s)\big(1+0(1)\big).$$

Таким образом, мы получили асимптотическое разложение (5.1).

Соотношение (5.2) для $i=\overline{p+1,r}$ доказывается аналогично случаю $i=p$ с использованием разложения (5.1).

Теорема 2 доказана.

6°. Рассмотрим следующее уравнение:

$$z+z^{\gamma_p} = s. \tag{6.1}$$

Аналогично (5.4) нетрудно показать, что решением уравнения (6.1) является функция $\Delta(s)$, удовлетворяющая начальному условию $\Delta(0)=0$.

Заметим, что в случае $\gamma_p=2$ (см. [5])

$$\Delta(s)=\sqrt{\frac{1}{4}+s}-\frac{1}{2}.$$

Покажем, что функции $\Lambda(s)$ и $\Delta(s)$ связаны соотношением:

$$\Delta(s) = \overline{K}_p^{\lambda_p-1}\Lambda(s\cdot\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)}). \tag{6.2}$$

Действительно, подставив в (5.8) вместо s величину $s\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)}$, имеем

$$\overline{K}_p^{\lambda_p-1}\Lambda\left(\frac{s}{\overline{K}_p^{\lambda_p-1}}\right)+\left[\overline{K}_p^{\lambda_p-1}\Lambda\left(\frac{s}{\overline{K}_p^{\lambda_p-1}}\right)\right]^{\gamma_p} = s,$$

откуда, пользуясь единственностью решения уравнения (6.1), приходим к (6.2).

Положим $(i=\overline{p, r})$:

$$A_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \bar{c}_i = 1, \\ \left(1+\delta_i^{\gamma_p-1}+\chi(\bar{c}_{i+1})\Delta(q_{i+1})\dfrac{\Delta^{\gamma_p-1}(q_{i+1})-\delta_i^{\gamma_p-1}}{\Delta(q_{i+1})-\delta_i}\right)^{-1}, & \text{если} \quad \bar{c}_i = 0, \\ \bar{c}_i\dfrac{\Delta(\delta_i)-\bar{c}_i^{\lambda_p-1}\chi(\bar{c}_{i+1})\Delta(q_{i+1})}{\Delta(\delta_i)-\Delta(q_i)}, & \text{если} \quad 0<\bar{c}_i<1, \end{cases} \tag{6.3}$$

где δ_i и q_i $(i=\overline{p, r+1})$ определяются рекуррентным образом:

$$\delta_{r+1} = q_{r+1} = 0,$$

$$\delta_i = \begin{cases} s_i+\chi(\bar{c}_{i+1})\Delta(\delta_{i+1}), & \text{если} \quad \bar{c}_i = 0, \\ \bar{c}^{\lambda_p-1}\{s_i+\chi(\bar{c}_{i+1})[\bar{c}_i\delta_{i+1}+(1-\bar{c}_i)\Delta(\delta_{i+1})]\}, & \text{если} \quad \bar{c}_i \neq 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$q_i = \begin{cases} \chi(\bar{c}_{i+1})q_{i+1}-\delta_i(1+\delta_i^{\gamma_p-1}), & \text{если} \quad \bar{c}_i = 0, \\ (1-\bar{c}_i)\Delta(\delta_i)+\chi(\bar{c}_{i+1})\bar{c}_i^{\lambda_p}q_{i+1}, & \text{если} \quad \bar{c}_i \neq 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Легко заметить, что функция $A_i(s)$ при $p_u \leqq i < p_{u+1}$ зависит только от вектора $s_u^{K_u}=(s_{p_u}, \ldots, s_{p_{u+1}-1})$, где $K_u=p_{u+1}-p_u-\delta_{uo}$.

Для удобства дальнейших выкладок введем обозначения:

$$\tilde{\delta}_i = \delta_i\cdot\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)},\ \tilde{q}_i = q_i\cdot\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)},$$

$$s_i^* = s_i\cdot\{\chi(p-i)+R_i[1-\chi(p-i)]\}, \tag{6.6}$$

где $R_i = \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}\cdot\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)}$

$$s^* = (s_1^*, \ldots, s_r^*),\ \eta_k^*(s) = \eta_k(s_k^*, \ldots, s_r^*),\ \theta_k^*(s) = \theta_k(s_k^*, \ldots, s_r^*).$$

Лемма 5. При $\varrho\downarrow 0$ справедливы следующие асимптотические соотношения $(i=\overline{p, r})$:

$$\eta_i^* \overset{\text{def}}{=} \eta_i^*(s) = \left\{\varrho_i^{\lambda_p-1}(1-\chi(\bar c_i))+\varrho_{i-1}^{\lambda_p-1}\chi(\bar c_i)\right\}\varrho_{i-1}\cdot\tilde\delta_i(1+0(1)), \tag{6.7}$$

$$\theta_i^* \overset{\text{def}}{=} \theta_i^*(s)=(\eta_i^*+\varrho_i^{\lambda_p}\tilde q_i)(1-\chi(\bar c_i))+\varrho_{i-1}^{\lambda_p}\tilde q_i\chi(\bar c_i)+0(\varrho_i^{\lambda_p}). \tag{6.8}$$

Доказательство. Покажем вначале справедливость соотношения (6.7), используя математическую индукцию по k.

При $k=r$ и $\varrho\downarrow 0$ имеем

$$\eta_r^* = s_r^* = \varrho_{r-1}\varrho_r^{\lambda_p-1}\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)}s = c_r^{\lambda_p-1}\varrho_{r-1}^{\lambda_p}\overline{K}_p^{-(\lambda_p-1)}s,$$

что в силу определения $\tilde\delta_r$ эквивалентно (6.7).

Положим, что (6.7) выполнено для всех $k=\overline{i+1, r-1}$ и докажем его справедливость при $k=i$ $(i=\overline{p, r-1})$.

а) Пусть $\bar c_{i+1}=0$. По предположению индукции при $\varrho\downarrow 0$

$$\eta_{i+1}^* = \varrho_i\varrho_{i+1}^{\lambda_p-1}\tilde\delta_{i+1}(1+0(1)).$$

Тогда, с учетом соотношений (5.14) и (5.12), выводим

$$y_i(\eta_i^*) = y_i(\varrho_i^{\lambda_p}c_{i+1}^{\lambda_p-1}\tilde\delta_{i+1}(1+0(1))) =$$

$$= \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}c_{i+1}^{\lambda_p-1}\tilde\delta_{i+1}(1+0(1)) = 0(\varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}),$$

откуда и из определения η_i следует, что

$$\eta_i^* = \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}K_p^{-(\lambda_p-1)}s(1+0(1)) = \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}\tilde\delta_i(1+0(1)).$$

б) Если $\bar c_{i+1}\neq 0$, то в силу предположения индукции при $\varrho\downarrow 0$

$$\eta_{i+1}^* = \varrho_i^{\lambda_p}\tilde\delta_{i+1}(1+0(1)),$$

откуда и из разложения (5.3) получаем

$$y_i(\eta_{i+1}^*) = y_i(\varrho_i^{\lambda_p}\tilde\delta_{i+1}(1+0(1))) =$$

$$= \varrho_{i-1}\varrho_i^{\lambda_p-1}[(1-\bar c_i)\Lambda(\tilde\delta_{i+1})+\bar c_i\tilde\delta_{i+1}](1+0(1)).$$

Последнее соотношение вкупе с определением η_i, (6.4) и (6.6) дает требуемое соотношение (6.7).

Перейдем теперь к доказательству соотношения (6.8), которое также проведем индукцией по k.

Очевидно, что при $k=r+1$ (6.8) имеет место. Положим, что оно справедливо при $k=\overline{r, i+1}$ и покажем, его справедливость при $k=i$.

а) Пусть $\bar{c}_i \neq 0$. Тогда из соотношений (6.7), (5.2) и определения q_i следует, что в условиях критической загрузки

$$\theta_i^* = \eta_i^* - v_i(\eta_i^*) + \chi(\bar{c}_{i+1}) \cdot \varrho_{i-1}^{\lambda_p - 1} c_i^{\lambda_p} \tilde{q}_{i+1}(1+0(1)) =$$
$$= \varrho_{i-1}^{\lambda_p}[(1-c_i)\Lambda(\tilde{\delta}_i) + \chi(\bar{c}_{i+1}) \cdot c_i^{\lambda_p} \tilde{q}_{i+1}] \cdot (1+0(1))$$

откуда и следует (6.8).

б) Если же $\bar{c}_i = 0$, то из индуктивного предположения и соотношения (5.13) при $\varrho \downarrow 0$ получаем

$$\theta_i^* = \eta_i^* + \varrho_i^{\lambda_p}[\chi(\bar{c}_{i+1})\tilde{q}_{i+1} - \tilde{\delta}_i(1+\overline{K}_p \tilde{\delta}_i^{\gamma_p - 1})](1+0(1)),$$

что при $\bar{c}_i = 0$ совпадает с (6.8). Лемма 5 доказана полностью.

Лемма 6. При условиях критической загрузки для всех схем A и B имеют место асимптотические соотношения ($i = \overline{p, r}$):

$$\mu_i(\eta_i^*) = \varrho_i^{\lambda_p - 1}\tilde{\delta}_i(1-\chi(\bar{c}_i)) + \varrho_{i-1}^{\lambda_p - 1}\Lambda(\tilde{\delta}_i)\chi(\bar{c}_i) + 0(\varrho_i^{\lambda_p - 1}), \tag{6.9}$$

$$\theta_{i+1}^* - v_i(\theta_i^*) = \varrho_i^{\lambda_p}\tilde{q}_i(1-\chi(\bar{c}_i)) + \varrho_{i-1}^{\lambda_p}(1-\bar{c}_i)[\Lambda(\tilde{q}_i) - \Lambda(\tilde{\delta}_i)]\chi(\bar{c}_i) + 0(\varrho_i^{\lambda_p}). \tag{6.10}$$

Доказательство леммы 6 проводится аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 7. Пусть для схемы B1 при $\varrho \downarrow 0$ выполнено условие

$$\varrho_{p_u - 1}^{-1} \sum_{j=p+1}^{\varrho_{p_u - 1}} a_j \varrho_{p_u}^{\frac{\gamma_{(j)} - 1}{\gamma_p - 1}} \to 0 \quad (u = \overline{2, m}). \tag{6.11}$$

Тогда

$$\mu_i(\theta_i^*) = \begin{cases} \mu_i(\eta_i^*) + c_i \varrho_i^{\lambda_p - 1}\tilde{q}_i(1+0(1)), & \text{при } i = p_u (u = \overline{1, m}), \\ \varrho_{i-1}^{\lambda_p}\Lambda(\tilde{q}_i)(1+0(1)), & \text{если } \bar{c}_i \neq 0; \end{cases} \tag{6.12}$$

$$\mu_{i+1}(\theta_{i+1}^*) - \mu_i(\theta_i^*) = \varrho_i^{\lambda_p - 1}[\Lambda(\tilde{q}_{i+1})\chi(\bar{c}_{i+1}) - \delta_i](1-\chi(\bar{c}_i)) +$$
$$+ \varrho_{i-1}^{\lambda_p - 1}[c_i^{\lambda_p - 1}\Lambda(\tilde{q}_{i+1})\chi(\bar{c}_{i+1}) - \Lambda(\tilde{q}_i)]\chi(\bar{c}_i) + 0(\varrho_i^{\lambda_p - 1}). \tag{6.13}$$

Доказательство. Второе из соотношений (6.12) легко доказать, если воспользоваться (6.8) и (6.9).

Пусть теперь $\bar{c}_i = 0$. Ясно, что

$$\mu_i(\theta_i^*) - \mu_i(\eta_i^*) = \mu_i'(\eta_i^*(1+0(1)))(\theta_i^* - \eta_i^*).$$

Из соотношения (2.3) дифференцированием по s выводим

$$\mu_i'(s) = \left\{1 - \sum_{j=1}^{i-1} a_j \beta_j'(\mu_i(s))\right\}^{-1}. \tag{6.14}$$

Покажем, что при $s^+ \to 0$ ($j = \overline{1, r}$)

$$\beta_{j1} + \beta_j'(s) = \alpha_j^{(\beta)}\gamma_{(j)} s^{\gamma_{(j)} - 1}(1+0(1)). \tag{6.15}$$

Действительно, интегрированием по частям можно показать, что

$$\beta_j'(s) = -\frac{1-\beta(s)}{s}+\frac{1}{s}\int\limits_0^\infty u\bar{B}_j(us^{-1})e^{-u}\,du. \tag{6.16}$$

По тауберовым теоремам [6] из разложения (3.1) получаем, что для $t\geqq 0$, $j=\overline{1,r}$

$$\bar{B}_j(t) = 1-B_j(t) = A_j t^{-\gamma_{(j)}}\left(1+\bar{\varphi}_j(t)\right) \tag{6.17}$$

где $\bar{\varphi}_j(t)\to 0$ при $t\to\infty$, а

$$A_j = \alpha_j^{(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma_{(j)}-1)}{\Gamma(2-\gamma_{(j)})}.$$

Из (6.17) получаем, что

$$s^{-1}\int\limits_0^\infty ue^{-u}\bar{B}_j(us^{-1})\,du = s^{\gamma_{(j)}-1}A_j\int\limits_0^\infty u^{1-\gamma_{(j)}}e^{-u}\left(1+\bar{\varphi}_j(us^{-1})\right)du,$$

Ясно, что при $u>0$

$$u^{1-\gamma_{(j)}}e^{-u}\left(1+\bar{\varphi}_j(us^{-1})\right)\to u^{1-\gamma_{(j)}}e^{-u},$$

откуда в силу теоремы Лебега при $s^+\to 0$

$$\int\limits_0^\infty u^{1-\gamma_{(j)}}e^{-u}\left(1+\bar{\varphi}_j(us^{-1})\right) = \Gamma(2-\gamma_{(j)})\left(1+0_s(1)\right),$$

что вкупе с (6.16) дает требуемое соотношение (6.15).

Тогда из соотношения (6.14) выводим:

$$\mu_i'\left(\eta_i^*(1+0(1))\right) = \left\{\varrho_{i-1}+\sum_{j=1}^{i-1}a_j\alpha_j^{(\beta)}\gamma_{(j)}\varrho_i^{(\lambda_p-1)(\gamma_{(j)}-1)}\left(1+0(1)\right)\right\}^{-1}. \tag{6.18}$$

Ясно, что при

$$\varrho_{i-1}^{-1}\sum_{j=1}^{p}a_j\alpha_j^{(\beta)}\gamma_{(j)}\varrho_i^{(\lambda_p-1)(\gamma_{(j)}-1)}\to 0,$$

$$\varrho_{i-1}^{-1}\sum_{j=p_{u-1}+1}^{p_u-1}a_j\alpha_j^{(\beta)}\gamma_{(j)}\varrho_i^{(\lambda_p-1)(\gamma_{(j)}-1)}\to 0,$$

откуда и из (6.18), (6.12) следует первое из соотношений (6.12).

Асимптотическое разложение (6.13) легко получается из (6.12) и (6.9).

Лемма 8. Если $\varrho\downarrow 0$, то $(i=\overline{p,r})$

$$c_i\left[\chi(\bar{c}_i)+\frac{\varrho_{i-1}-\varrho_i}{a_i}\cdot E_i(s^*)\right]\sim A_i(s), \tag{6.19}$$

$$T_i(s^*)\sim E(s^*)\frac{\varrho_{i-1}-\varrho_i}{a_i}, \tag{6.20}$$

$$N_i(s^*)\sim M_i(s^*)\sim\frac{\varrho_{i-1}-\varrho_i}{a_i}. \tag{6.21}$$

Доказательство. Покажем вначале справедливость (6.19).

а) Пусть $\bar{c}_i=0$. Из (2.7), (6.10) и (6.13) при $\varrho\downarrow 0$ находим

$$c_i\cdot \frac{\varrho_{i-1}-\varrho_i}{a_i}\cdot E_i(s^*)\sim \frac{\chi(\bar{c}_{i+1})\Lambda(\tilde{q}_{i+1})-\tilde{\delta}_i}{\tilde{q}_i},$$

откуда, используя (6.2)—(6.6), приходим к отношению эквивалентности (6.19).

б) Если $\bar{c}_i\neq 0$, то при $\varrho\downarrow 0$ имеем

$$c_i\left[1+\frac{\varrho_{i-1}-\varrho_i}{a_i}\cdot E_i(s^*)\right]\sim \bar{c}_i\,\frac{\Lambda(\tilde{\delta}_i)-c_i^{\lambda_p-1}\Lambda(\tilde{q}_{i+1})\chi(\bar{c}_{i+1})}{\Lambda(\tilde{\delta}_i)-\Lambda(\tilde{q}_i)},$$

откуда и из (6.2), (6.3) следует (6.19).

Остается заметить, что при $\bar{c}_i=1$ в силу равенства (см. (6.5)) $\tilde{q}_i=\chi(\bar{c}_{i+1})\tilde{q}_{i+1}$ следует $A_i(s)=1$. Тем самым доказательство (6.19) завершено.

Отношение эквивалентности (6.20) легко вытекает из (2.10), (6.12) и (6.10), поскольку

$$\frac{\theta^*_{i+1}-\nu_i(\theta^*_i)}{\varrho_{i-1}-\varrho_i}\sim \mu_i(\theta^*_i)-\mu_i(\eta^*_i).$$

Аналогично доказывается и отношение эквивалентности (6.21).

7°. Введем в рассмотрение системы $\vec{M}_p|\vec{G}_p|1|\infty$ (схема А) и $\vec{M}_{p-1}|\vec{G}_{p-1}|1|\infty$ (схемы В), в которых параметры первых $p-1$ потоков фиксированы и совпадают с соответствующими значениями параметров первых $p-1$ потоков в исходных системах $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$.

Длительности обслуживания в каждой введенной системе независимы в совокупности и не зависят от входных потоков. Ф. р. длительности обслуживания i-вызова $(i=\overline{1,p})-B_i(t)$, $B_i(+0)=0$.

Поскольку во введенных системах п. Л.—С. $\omega(s^{(p)})$ и $\omega(s^{(p-1)})$ находятся на основании теоремы 1, то справедлива.

Лемма 9. Для введенной системы (схема А) $\vec{M}_p|\vec{G}_p|1|\infty$

$$\lim_{\varrho\downarrow 0}\omega(s^{(p-1)},0)=\frac{\varrho_{p-1}}{\beta_{p1}}\Psi_p(s^{(p-1)},0), \tag{7.1}$$

где $\Psi_p(s^{(p-1)},0)$ находится из теоремы 1 и не зависит от $\bar{a}_p=\dfrac{\varrho_{p-1}}{\beta_{p1}}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу определения η_p и θ_p имеем $\eta_p=s_p, \theta_{p+1}=0$, а при $s_p\downarrow 0$ из соотношения (3.4) выводим

$$\theta_p=s_p-\nu_p(s_p)=s_p(1-c_p)+0(s_p).$$

Тогда в силу асимптотических соотношений (3.2) и (3.4) при $\varrho\downarrow 0$ имеем

$$E_p(s^{(p)})=a_p\lim_{s_p\downarrow 0}\frac{\mu_p(\theta_p)}{\nu_p(\theta_p)}=a_p\lim_{s_p\downarrow 0}\frac{\varrho^{-1}_{p-1}s_p(1-c_p)+0(s_p)}{s_pc_p(1-c_p)+0(s_p)}=\frac{a_p}{\varrho_p}. \tag{7.2}$$

Поскольку η_i $(i=\overline{1,p+1})$ не зависят от a_p и θ_i при $s_p=0$ не зависят от a_p, то при $s_p=0$ от a_p не зависят и функции $H_i(s)$, $V_j^{\{i\}}(s)$ $(j=\overline{1,p-1};\ i=\overline{1,p})$, а следовательно и $\Psi_i(s^{(p-1)},0)$.

Подставляя (7.2) в (2.15) и принимая во внимание конечность функции $\Psi_i(s^{(p)})$ при фиксированном $s^{(p)}>0^{(p)}$ из (2.14) получаем

$$\lim_{\varrho_p\downarrow 0}\omega(s^{(p-1)},0)=\lim_{\varrho_p\downarrow 0}\varrho_p\left\{1+\sum_{i=1}^{p}\Psi_i(s^{(p-1)},0)E_i(s^{(p-1)},0)\right\}=\bar{a}_p\Psi_p(s^{(p-1)},0),$$

что и доказывает лемму 9.

Для упрощения формулировки основного результата введем следующие обозначения:

$$Q_0(x^{(0)})=1,$$

$$Q_0(x^{(p-1)})=\alpha\big(\overline{W}(x^{(p-1)},\infty),W(x^{(p-1)})\big)\quad(p=\overline{2,r}),$$

где

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}x, & \text{для схемы A},\\ y, & \text{для схем B},\end{cases}$$

а $\overline{W}(x^{(p-1)},\infty)$ имеет своим п. Л.—С. функцию $\lim\limits_{\varrho_p\downarrow 0}\omega(s^{(p-1)},0)$.

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть имеют место разложения (3.1) и для схемы B1 выполнено условие (6.11). Тогда в условиях критической загрузки

$$\lim_{\varrho\downarrow 0}P\{w_i<x_i,\ w_jR_j<x_j(i=\overline{1,p-1};\ j=\overline{p,r})\}=\prod_{u=0}^{m}Q_u(x_u^{k_u})$$

где $k_u=p_{u+1}-p_u-\delta_{u0}^{u=0}$, $x_u^{(ku)}=(x_{p_u+\delta_{u0}},\dots,x_{p_{u+1}-1}^{-1})$, а функции $Q_u(x_u^{ku})$ $(u=1,m)$ определяются своими п. Л.—С.

$$\prod_{k=p_u}^{p_{u+1}^{-1}}A_k(s_u^{k_u}).$$

Доказательство. Доказательство вначале проведем для схемы A.

Из соотношения (2.16), как и для введенной системы $\vec{M}_p|\vec{G}_p|1|\infty$ рекуррентно вычисляются

$$\lim_{\varrho\downarrow 0}\Psi_p(s^*)=\Psi_p(s^{(p-1)},0).$$

Обозначим $D_i(s)=\beta_{i1}^{-1}\Psi_i(s)$ $(i=\overline{p,r})$. Тогда из (2.9) имеем, что при $\varrho\downarrow 0$ $(k\geqq p;\ i=\overline{k+1,r})$

$$\beta_{i1}^{-1}V_k^{(i)}(s^*)\sim E_k(s^*). \tag{7.3}$$

В силу леммы 8 из (2.16) нетрудно получить, что $(p_u<i\leqq p_{u+1};\ u=\overline{1,m})$

$$\overline{D}_i(s)=\lim\varrho_{p_u}D_i(s^*)=\bar{c}_{p_ui-1}\varrho_{p-1}\overline{D}_p(s)\prod_{k=p}^{i-1}A_k, \tag{7.4}$$

где $\overline{D}_p(s)=\beta_{p1}^{-1}\Psi_p(s^{(p-1)},0)$.

Действительно, при $i=p$ соотношение (7.4) имеет место. Положим, что оно верно для $\bar{D}_n$ $(n=\overline{p, i})$ и докажем его справедливость для $\bar{D}_{i+1}(s)$.

а) Пусть $i<p_{u+1}$. Из (2.16) и (6.19) с учетом (7.3) имеем

$$\bar{D}_{i+1}(s) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \varrho_{p_u}\left[\sum_{k=p_u}^{i-1} D_k(s^*)E_k(s^*)\beta_{k1}+D_i(s^*)E_i(s^*)\beta_{i1}\right] =$$

$$= \lim_{\varrho\downarrow 0} \varrho_{p_u}D_i(s^*)\left[1+\frac{\varrho_{i-1}-\varrho_i}{a_i}E_i(s^*)\right] = \bar{c}_{p_u i}\varrho_{p-1}\bar{D}_p(s)\prod_{k=p}^{i} A_k(s).$$

б) При $i=p_{u+1}$, учитывая, что $\bar{c}_{ii}=1$, из (2.16), (6.19) и (7.3) получаем

$$\bar{D}_{i+1}(s) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \varrho_{p_{u+1}}D_i(s^*)E_i(s^*)\beta_{i1} = c_{i-1p_u}\bar{D}_i(s)A_i(s),$$

что вкупе с предположением индукции для $\bar{D}_i(s)$ дает (7.4).

Далее, из (2.15) при $p_m<r$ выводим

$$\bar{\Phi}(s) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varrho\downarrow 0} \varrho_r\Phi(s^*) =$$

$$\lim_{\varrho\downarrow 0} c_{rp_m}\varrho_{p_m}\left(\sum_{i=p_m}^{r-1} D_i(s^*)E_i(s^*)\beta_{i1}+D_r(s^*)\cdot E_r(s^*)\cdot\beta_{r1}\right) = \varrho_{p-1}\bar{D}_p(s)\cdot\prod_{i=p}^{r} A_i(s).$$

Если же $\bar{c}_r=0$, то согласно (6.19) и (7.4) имеем

$$\bar{\Phi}(s) = \lim \varrho_r D_r(s^*)\cdot E_r(s^*)\cdot\beta_{r1} =$$

$$= \bar{c}_{r-1p_{m-1}}\bar{D}_r(s)\cdot A_r(s) = \varrho_{p-1}\bar{D}_p(s)\prod_{i=p}^{r} A_i(s),$$

что и доказывает теорему для схемы А.

Перейдем к доказательству теоремы 3 в случае схем Вν ($\nu=1, 2, 3$). Легко видеть, что функции

$$\bar{\Phi}_i(s) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \Phi_i(s^*) \quad (i=\overline{1, p-1})$$

вычисляются рекуррентно из (2.17) и (2.18), как и для введенной системы $\vec{M}_{p-1}|\vec{G}_{p-1}|1|\infty$.

Схема В1. В силу определения функций $T_i(s)$ $(i=\overline{1, r})$ и отношений эквивалентности (6.20), (6.19) легко показать, что

$$\lim_{\varrho\downarrow 0}\omega(s^*) = \varrho_{p-1}\prod_{i=1}^{p-1}\left(1+T_i(s^*)\right)\cdot\lim_{\varrho\downarrow 0}\prod_{i=p}^{r} c_i\left(1+T_i(s^*)\right) =$$

$$= \varrho_{p-1}\left(1+\bar{\Phi}_{p-1}(s)\right)\cdot\prod_{i=p}^{r} A_i(s).$$