Обобщенные преобразования Хаара и автоматические системы проверки качества печатных плат

С. С. Агаян, А. К. Матевосян

§ 1. Введение и постановка задачи

Одной из многочисленных областей применения распознавания образов является проверка качества печатных плат, которая может быть основана на сравнении результатов измерения параметров проверяемой платы и эталонного фотообразца. Эта задача приводит к необходимости разработки автоматических систем проверки качества плат. Основу таких систем должны составить автоматические системы распознавания образов.

Прежде чем приступить к синтезу искомой системы распознавания образов необходимо решить следующие задачи: а) выделения признаков, б) сжатия данных.

Ту и Гонсалес в работе [1] сводят эти задачи к задаче аппроксимации посредством разложения по некоторой системе функций. Задача разложения приводит, в свою очередь, к выполнению преобразования Фурье по выбранной базисной системе, т. е. к выполнению над исходными векторами f матричных преобразовании вида $F=\mathbf{A}\cdot f$ (прямое преобразование) и $f=\overline{\mathbf{A}}\cdot F$ (обратное преобразование), где $\mathbf{A}$-матрица, соответствующая базисной системе, $\overline{\mathbf{A}}$-обратная к ней матрица. Целесообразно выбирать критерием качества аппроксимации среднеквадратичную ошибку [1].

Таким образом, возникает задача выбора такой системы базисных функций, которая минимизирует среднеквадратичную ошибку, сосредотачивая большую часть энергии в первых n слагаемых разложения. Как указано Уинтцем (P. Wintz) [2] решение этой задачи аналогично решению задачи определения преобразования, обеспечивающего получение некоррелированных компонент. Этим условиям удовлетворяет преобразование Хотеллинга [3], которое приводит к некоррелированным компонентам и минимизирует среднеквадратичную ошибку, сосредотачивая максимум энергии в первых n компонентах [2]. Выполнение преобразования Хотеллинга для изображения, состоящего из $N\times N$, N-любое, точек требует выполнения N^4 операций умножения [2]. Наиболее близко по своим декоррелирующим свойствам к преобразованию Хотеллинга стоит ортогональное преобразование Фурье [4]. Преимущество преобразования Фурье по отношению к преобразованию Хотеллинга состоит в существовании быстрого алгоритма выполнения преобразования за $N^2 \log_2 N^2$ операций комплексного умножения. Этим преобразованиям несколько уступают по критерию среднеквадратичной ошибки ортогональные преобразования Уолша (Walsh) [5], Хаара (Haar) [5—6] и наклонное (slant) [7]. Наилучшим из них по своим декоррелирующим свойствам является slant — преобразование, наихудшим — Хаара. Преобразования slant, Уолша и Хаара требуют выполнения $4N(N-2)$, $N=2^k$ операций умножения, $2N^2 \log_2 N$, $4N(N-1)$, $N=2^k$, операций сложения и вычитания соответственно. Таким образом, преобразование Хаара наиболее привлекательно с точки зрения аппаратурной реализации [4], скорости вычисления, хотя и не совсем хорошо декоррелирует данные, что, по-видимому, обусловлено большой разреженностью матриц Хаара. Недостатком последних трех преобразований является и то, что порядки преобразуемых массивов N должны равняться степени двойки.

Таким образом, при выборе базисной системы имеется две альтернативы: выбрать систему, обеспечивающую высокое качество декорреляции, но при этом потерять в скорости и времени обработки информации либо повысить скорость обработки за счет ухудшения качества. Анализ приведенных фактов натолкнул авторов на идею обобщения преобразования Хаара с двух различных позиций. В настоящей работе построены гибридные ортогональные системы Фурье—Хаара, slant—Хаара, Адамара—Хаара, которые по своим скоростным и декоррелирующим качествам являются промежуточными относительно систем Хаара и Фурье, slant, Адамара соответственно: лучше декоррелируют данные, чем классическое преобразование Хаара, и в то же время обладают достаточно быстрыми алгоритмами, близкими по скорости выполнения к преобразованию Хаара и очень просты с точки зрения реализации.

§ 2. Обобщенные матрицы и функции Хаара первого типа

2.1. Определение обобщенных матриц и функций Хаара первого типа. В 1910 году Хааром [8] была описана система $\{X(k, x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональных на отрезке $[0, 1]$ функций, обладающая следующими свойствами: любая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k, x) c_k$$

где $c_k = \int_0^1 f(t) X(k, t)\, dt$, а $X(0, x) \equiv 1$

$$X(2^m+j, x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{для} \quad x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1/2}{2^m}\right) \\ -\sqrt{2^m}, & \text{для} \quad x \in \left[\frac{j+1/2}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right) \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$m = 0, 1, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^{m-1}.$$

Система функций Хаара состоит из подсистем. Подсистема номер m содержит 2^m функций Хаара $X(2^m+j, x)$ $j=0, 1, \ldots, 2^m-1$. Функции Хаара m-ой подсистемы постоянны на полуинтервалах, получающихся от деления отрезка $[0, 1]$ на 2^{m+1} равных частей.

На рис. 1 изображены первые 8 функций Хаара.

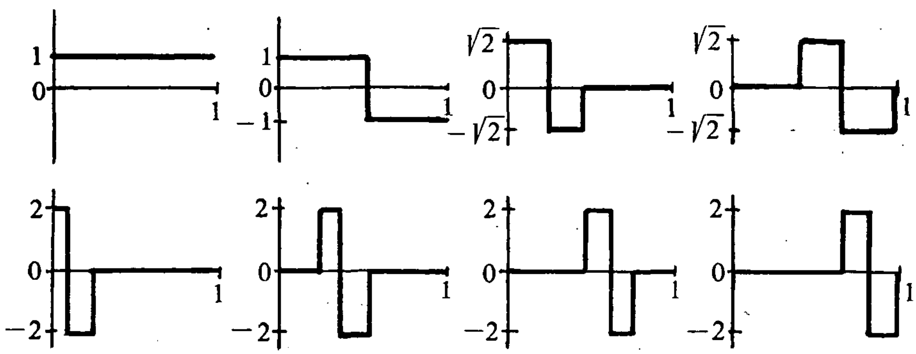

Рис. 1

Как указано в [8], можно строить системы функций, аналогичные $\{X(k, x)\}_{k=0}^{\infty}$, деля отрезок $[0, 1]$, а затем и каждый из получающихся отрезков на две неравные части, лишь бы множество точек деления было бы всюду плотным на $[0, 1]$. Такие системы называются системами типа Хаара.

Матрица Хаара $\mathbf{HA}_{2^n}$ является квадратной матрицей порядка 2^n, элементы которой равны $\pm\sqrt{2^m}$ или 0 (m-фиксировано в строке), в каждой строке происходит одна смена знака и строки ортогональны, т. е. выполняется

$$\mathbf{HA}_{2^n} \cdot \mathbf{HA}_{2^n}^T = 2^n \mathbf{I}_{2^n} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{I}_N$-единичная матрице порядка N.

Матрицы Хаара порядка $N=2^n$ получаются равномерной выборкой функций Хаара. Приведем матрицу Хаара порядка 8.

$$\mathbf{HA}_{2^3} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{Vmatrix}$$

Вопросы, связанные с построением ортогональных матриц в более общем случае, соответствующем выбору функций типа Хаара, не исследовались.

Для матриц Хаара $\mathbf{HA}_{2^n}$ со стороны Файно [9] получены рекуррентные соотношения, связывающие подматрицы матриц $\mathbf{HA}_{2^n}$, $n=1, 2, \ldots$. Мы приведем несколько иное рекуррентное построение $\mathbf{HA}_{2^n}$, позволяющее обобщить матрицы Хаара:

$$\mathbf{HA}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

$$\mathbf{HA}_{2^n} = \begin{Vmatrix} \mathbf{HA}_{2^{n-1}} \otimes [1, 1] \\ \sqrt{2^{n-1}}\, \mathbf{I}_{2^{n-1}} \otimes [1, -1] \end{Vmatrix} \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{2.3}$$

Зададим следующую рекуррентную формулу построения квадратных матриц $\mathbf{A}_{k^n}$ порядка k^n, обобщающую (2.3):

$$\mathbf{A}_{k^n} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes e_k \\ \sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}'_k \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

где e_k-вектор-строка из k единиц; $\mathbf{A}'_k$ матрица составленная из последних $(k-1)$ строк матрицы $\mathbf{A}_k$, $\otimes$-кронекерово произведение [13]. Выясним, при каких условиях матрицы $\mathbf{A}_{k^n}$ будут ортогональными.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathbf{A}_k$-квадратная матрица порядка k, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T = k\mathbf{I}_k, \quad e_k \mathbf{A}_k'^T = O_{k-1} \tag{2.5}$$

(O_k-вектор строка из k нулей) тогда формула (2.4) порождает ортогональные матрицы порядка k^n.

Доказательство. Проведем индукцией по n. Для $n=1$ ортогональность $\mathbf{A}_k$ имеем из условия (25). Предположим справедливость утверждения теоремы для $n-1$, т. е.

$$\mathbf{A}_{k^{n-1}} \cdot \mathbf{A}_{k^{n-1}}^T = k^{n-1} \mathbf{I}_{k^{n-1}}.$$

Докажем ортогональность матрицы $\mathbf{A}_{k^n}$.

$$\mathbf{A}_{k^n} \cdot \mathbf{A}_{k^n}^T = \begin{Vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{Vmatrix}$$

где

$$R_1 = (\mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes e_k) \cdot (\mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes e_k)^T,$$

$$R_2 = (\mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes e_k) \left(\sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}'_n\right)^T,$$

$$R_3 = \left(\sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}'_k\right) \left(\sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}'_k\right)^T.$$

Из свойств кронекерского произведения, условий (2.5) и предположения ин дукции имеем:

$$R_1 = (\mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes e_k)(\mathbf{A}_{k^{n-1}}^T \otimes e_k^T) = (\mathbf{A}_{k^{n-1}} \mathbf{A}_{k^{n-1}}) \otimes (e_k e_k^T) = k k^{n-1} \mathbf{I}_{k^{n-1}} = k^n \mathbf{I}_{k^{n-1}},$$

$$R_2 = (\mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes e_k) \left(\sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}_k'^T\right) =$$

$$= \sqrt{k^{n-1}}\, (\mathbf{A}_{k^{n-1}} I_{k^{n-1}}) \otimes (e_k \mathbf{A}_k'^T) = \sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{A}_{k^{n-1}} \otimes O_{k-1} = O_{k^{n-1}}^T \otimes O_{(k-1)k^{n-1}},$$

$$R_3 = \left(\sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}'_k\right) \cdot \left(\sqrt{k^{n-1}}\, \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes \mathbf{A}_k'^T\right) =$$

$$= k^{n-1} \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes (\mathbf{A}'_k \mathbf{A}_k'^T) = k^{n-1} \mathbf{I}_{k^{n-1}} \otimes k \mathbf{I}_{k-1} = k^n \mathbf{I}_{(k-1)k^{n-1}}.$$

Таким образом

$$\mathbf{A}_{k^n}\mathbf{A}_{k^n}^T = \begin{Vmatrix} k^n I_{k^{n-1}} & O_{k^{n-1}}^T \otimes O_{(k-1)k^{n-1}} \\ O_{k^{n-1}} \otimes O_{(k-1)k^{n-1}}^T & k^n \mathbf{I}_{(k-1)k^{n-1}} \end{Vmatrix} = k^n \mathbf{I}_{k^n}.$$

Теорема доказана.

Условию (2.5) удовлетворяют

1. матрицы slant, Уолша и Хаара, если $k=2^m$,
2. нормализованные матрицы Адамара [13], если $k=4t$,
3. матрицы Фурье, если k-произвольное натуральное число.

Подставляя указанные матрицы в качестве исходной $\mathbf{A}_k$ в формулу (2.4) будем получать ортогональные матрицы, названные нами гибридными матрицами Хаара-slant, Уолша—Хаара, Адамара—Хаара и Фурье—Хаара, поскольку они по структуре близки к матрицам Хаара, но в то же время содержат в себе функции названных систем.

Отметим также, что система Фурье—Хаара является комплексной системой, что дает некоторые преимущества при решении определенных задач, связанных с обработкой комплексных данных.

В некоторых задачах обработки информации предъявляются высокие требования к скорости проведения преобразования. Если же k такое, что мы вынуждены обратиться к матрицам Фурье, это снижает скорость преобразования по сравнению, например, с преобразованием Уолша—Хаара для $k=2^m$.

Мы приведем такой метод построения матрицы $\mathbf{A}_k$ удовлетворяющей (2. 5), k-любое, которое позволяет получить алгоритмы, близкие по скорости к преобразованию Хаара.

Лемма. Для любого натурального числа k можно построить квадратную матрицу $\mathbf{A}_k$ порядка k с элементами $\lambda_i a_{ij}$, a_{ij}-целые числа, удовлетворяющую (2.5).

Доказательство. Пусть $k=2^p+2^q$, $p>q$. Положим

$$\mathbf{A}_k = \{\overline{a_{ij}}\} = \begin{Vmatrix} & e_k & \\ e_{2^p} & & ce_{2^q} \\ \mathbf{HA}'_{2^p} & & 0 \\ 0 & & \mathbf{HA}'_{2^q} \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

где $c=-\dfrac{2^p}{2^q}$-целое число.

Поскольку любое число k можно представить в виде

$$k = 2^p \cdot \varepsilon_p + 2^{p-1}\varepsilon_{p-1} + \ldots + \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ и $\varepsilon_p = 1$, то аналогичное (2.6) построение можно провести для любого k.

Положим $\mathbf{A}_k = \{\lambda_i \overline{a_{ij}}\}$, где нормировочные множители λ_i выбираются из условия

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_i^2 \overline{a_{ij}}^2 = k, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Легко проверяется, что матрица $\mathbf{A}_k$ удовлетворяет (2.5). Лемма доказана.

Приведем в качестве примера A_3 и A_{3^2}:

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$A_{3^2} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{18}}{2} & -\frac{\sqrt{18}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{18}}{2} & -\frac{\sqrt{18}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{18}}{2} & -\frac{\sqrt{18}}{2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Вернемся к формуле (2.4). Полученные по (2.4) ортогональные матрицы назовем обобщенными матрицами Хаара первого типа и будем обозначать $\mathbf{GI}_N$. Структура $\mathbf{GI}_N$ максимально приближена к структуре $\mathbf{HA}_{2^n}$. $\mathbf{GI}_{k^n}$ состоит из n подматриц. При переходе от $\mathbf{GI}_{k^n}$ к $\mathbf{GI}_{k^{n+1}}$ добавляется n-ая подматрица, содержащая $(k-1)k^n$ строк.

Основываясь на построенных матрицах Хаара, введем системы ортогональных на отрезке [0, 1] функций. Обозначим через $g(p, q)$ элементы матрицы $\mathbf{GI}_{k^{m+1}}$.

Определим функции

$$XI(k^m+j, x) = g(k^m+j, p), \quad \text{если} \quad x \in \left[\frac{p}{k^{m+1}}, \ \frac{p+1}{k^{m+1}}\right)$$

$$j = 0, 1, \ldots, (k-1)k^m-1, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Введенную систему назовем обобщенной системой Хаара первого типа. Первые шесть функций, полученных на основе $\mathbf{GI}_{3^n}$ матриц приведены на рис. 2.

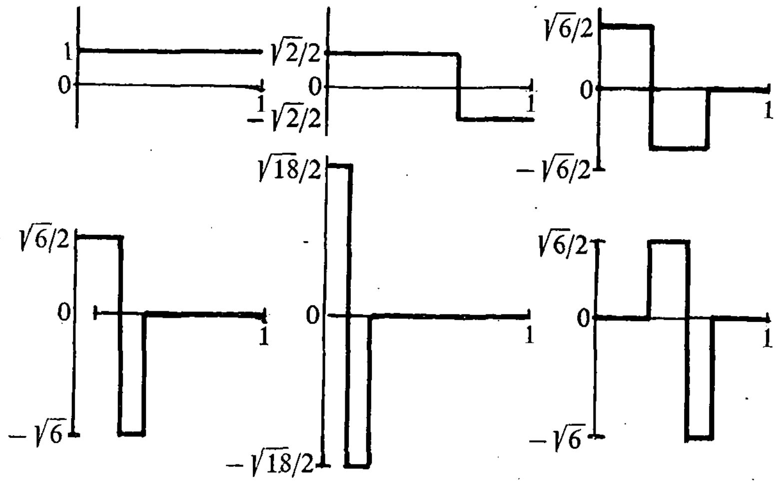

Рис. 2

Отметим, что при выборе $\mathbf{A}_k$ по (2.6) функции $XI(k^m+j, x)$ являются функциями типа Хаара, а соответствующие им матрицы — ортогональными матрицами типа Хаара.

2.2. Свойства обобщенных матриц и функций Хаара 1 типа.

1. Обобщенные матрицы Хаара первого типа ортогональны, т. е. удовлетворяют условию:

$$\mathbf{GI}_N \cdot \mathbf{GI}_N^T = N\mathbf{I}_N.$$

2. Обобщенные функции Хаара первого типа ортогональны на отрезке [0, 1], т. е. удовлетворяют

$$\int_0^1 XI(k^m+j, x) XI(k^n+i, x)\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m=n,\ j=i \\ 0, & \text{если} \quad m \neq n \quad \text{или} \quad j \neq i. \end{cases}$$

3. Если выбрать $\mathbf{A}_k$ по (2.6), то $\mathbf{GI}_{k^n}$ переходят в матрицы типа Хаара [8], а соответствующие им функции являются мартингалом [10].

4. Элементы гибридных матриц Уолша—Хаара, Адамара—Хаара и матрицы типа Хаара имеют вид $\lambda_i a_{ij}$, где a_{ij}-целые числа, λ_i-нормировочный множитель.

5. Матрицы $\mathbf{GI}_{k^n}$ при $k=2$ совпадают с матрицей $\mathbf{HA}_{2^n}$.

6. Матрицы $\mathbf{GI}_{k^n}$ при $k=2^m$ и выборе $\mathbf{A}_k$ матрицами Хаара связаны матричными соотношениями с матрицами Адамара $\mathbf{HD}_{2^n}$

$$\mathbf{HD}_{2^{mn}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p' \end{Vmatrix} \cdot G\mathbf{I}_{2^{mn}}$$

где

$$p' = \mathrm{diag}\left\{p, \frac{1}{\sqrt{2^m}} \mathbf{HD}_{2^m} \otimes p, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2^{m(n-1)}}} \cdot \mathbf{DH}_{2^{m(n-1)}} \otimes p\right\}$$

а

$$p = \operatorname{diag}\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{HD}_2, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}} \cdot \mathbf{HD}_{2^{m-1}}\right\}$$

которое при $n=1$ или $m=1$ переходит в матричное соотношение между матрицами Адамара и классическими матрицами Хаара, полученное Файно [9].

7. Пусть $f(x)$-интегрируемая на отрезке $[0, 1]$ функция, а $\varphi_n(x)$ перенумерованные функции $\mathbf{GI}_{k^n}$ системы. Составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

где

$$c_n = \int_0^1 f(t) \varphi_n(t)\, dt.$$

Через $S_m(f, x)$ обозначим частичную сумму ряда

$$S_m(f, x) = \sum_{n=0}^{m} c_n \varphi_n(x).$$

Справедливы

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$ тогда:

1. $S_{m_n}(f, x)$ сходится $f(x)$ почти во всех точках $[0, 1]$, $m_n = 1+(k-1)n$,
2. в точке x_0 непрерывности $f(x)\, S_{m_n}(f, x)$ сходится к $f(x_0)$, $m_n = 1+(k-1)n$,
3. если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то $S_{m_n}(f, x)$ сходится к $f(x)$ равномерно по x.

Теорема. Если $f(x) \in \operatorname{Lip}(\alpha, L)$, то

$$|f(x) - S_{m_n}(f, x)| \leqq \frac{L}{\alpha+1} \left(\frac{1}{m_n}\right)^{\alpha}$$

для всех

$$x \in [0, 1], \quad m_n = k^n.$$

2.3. Алгоритмы быстрых преобразований по $\mathbf{GI}_{k^n}$ матрицам. В настоящем пункте будут приведены алгоритмы выполнения прямого

$$F = \mathbf{GI}_{k^n} \cdot f^T \tag{2.7}$$

и обратного

$$f = \frac{1}{k^n} \mathbf{GI}_{k^n}^T \cdot F^T \tag{2.8}$$

преобразований, где f-исходный вектор порядка k^n, F-преобразование вектора f.

Алгоритм прямого преобразования. Приведем два быстрых алгоритма прямого преобразования (2.7).

1. Используя свойства кронекерского произведения и на основании (2.4) можно получить, что

$$\mathbf{GI}_{k^n}=\left\|\begin{matrix}\mathbf{A}_k\cdot(\mathbf{I}_k\otimes e_{k^{n-1}})\\ \sqrt{k}(\mathbf{I}_k\otimes\mathbf{A}_k')\cdot(\mathbf{I}_{k^2}\otimes e_{k^{n-2}})\\ \vdots\\ \sqrt{k^{n-1}}\,\mathbf{I}_{k^{n-1}}\otimes\mathbf{A}_k'\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\mathbf{A}_k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{I}_k\otimes\mathbf{A}_k' & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & \mathbf{I}_{k^{n-1}}\otimes\mathbf{A}_k'\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\mathbf{I}_k\otimes e_{k^{n-1}}\\ \mathbf{I}_{k^2}\otimes e_{k^{n-2}}\sqrt{k}\\ \vdots\\ \sqrt{k^{n-1}}\,\mathbf{I}^{k^n}\end{matrix}\right\|$$

откуда следует существование быстрого алгоритма для выполнения (2.7).

2. Приведем иное разложение матрицы $\mathbf{GI}_{k^n}$ в произведение слабозаполненных матриц, которое и задаст второй алгоритм быстрого выполнения преобразований (2.7).

Теорема. Пусть матрица $\mathbf{A}_{k^n}$ построена по (2.4), тогда имеет место разложение:

$$\mathbf{A}_{k^n}=R_1R_2\dots R_n \tag{2.9}$$

где

$$R_n=\left\|\begin{matrix}\mathbf{I}_{k^{n-1}}\otimes e_k\\ \sqrt{k^{n-1}}\,\mathbf{I}_{k^{n-1}}\otimes\mathbf{A}_k'\end{matrix}\right\|,\quad R_i=\left\|\begin{matrix}\mathbf{I}_{k^{i-1}}\otimes e_k & 0\\ \sqrt{k^{i-1}}\,\mathbf{I}_{k^{i-1}}\otimes\mathbf{A}_k' & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{k^n-k^i}\end{matrix}\right\|,\ i=1,2,\dots,n-1. \tag{2.10}$$

Доказательство приводится непосредственной проверкой. Действительно, нижняя часть R_n представляет собой последнюю подматрицу матрицы $\mathbf{A}_{k^n}$. Умножив $R_{n-1}\cdot R_n$, получим

$$R_{n-1}\cdot R_n=\left\|\begin{matrix}\mathbf{I}_{k^{n-2}}\otimes e_{k^2}\\ \sqrt{k^{n-2}}\,\mathbf{I}_{k^{n-2}}\otimes\mathbf{A}_k'\otimes e_k\\ \sqrt{k^{n-1}}\,\mathbf{I}_{k^{n-1}}\otimes\mathbf{A}_k'\end{matrix}\right\|$$

т. е. предпоследняя подматрица тоже восстановлена и т. д. Таким образом, справедливость разложения (2.9) доказана.

Теперь преобразование (2.7) сведется к последовательным умножениям матриц R_i на вектора. Если обозначить через $D_0(1)$ и $D_1(1)$ число операций сложения и умножения соответственно, требуемое для выполнения преобразования $\mathbf{A}_k f^T$, то на выполнение этих последовательных умножений потребуется (умножения на $\sqrt{k^{n-i}}$ отложим до обратного преобразования, как было сделано и для классического преобразования Хаара [5]): для R_i — $k^{i-1}D_0(1)$, $i=1,2,\dots,n$ операций сложения и $k^{i-1}D_1(1)$ операций умножения. Всего на выполнение преобразования требуется $D_0(1)\sum_{i=1}^{n}k^{i-1}=$ $=D_0(1)\dfrac{k^n-1}{k-1}$ операций сложения и $D_1(1)\dfrac{k^n-1}{k-1}$ операций умножения.

В частном случае, при $k=2$, алгоритм переходит в известный алгоритм быстрого преобразования Хаара [5, 6].

На рис. 3 приводится граф быстрого преобразования для гибридной матрицы Фурье—Хаара порядка 9. На графе $W=\exp\left\{-\dfrac{2\pi i}{3}\right\}$ ребра графа с коэффициентами означают перенос сигнала, умноженного на соответствующий коэффициент. Коэффициенты, равные 1, не указаны. Коэффициенты представляют собой элементы начальной матрицы фурье

$$\mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 \\ 1 & W^2 & W^4 \end{bmatrix}.$$

Приведем подпрограмму быстрого преобразования FGHR по гибридным матрицам $\mathbf{GI}_{k^n}$. R обозначает преобразование Уолша, Адамара или Хаара. Подпрограмма использует программы быстрых FR преобразований, команды обращения к которым имеют вид CALL FR(K, $F\emptyset$, F). В подпрограммах $F\emptyset$ обозначает исходный массив, F-массив для записи конечного результата, A-рабочий массив.

```
      SUBROUTINE FGHR(K, M, N, FØ, F)
      DIMENSION FØ(N), A(K), F(N)
    1 M=M-1
      M1=K**M
      DO 2 J=1, M1
      DO 3 I=1, K
    3 A(I)=FØ((J-1)*K+1)
      CALL FR(K, A, A)
      FØ(J)=A(1)
      DO 2 I=2, K
    2 F(M1+(K-1)*(J-1)+I-1)=A(1)
      IF(M.EQ.Ø)GO TO 4
      GO TO 1
    4 F(1)=FØ(1)
      RETURN
      END
```

в) Алгоритм обратного преобразования.

Поскольку матрица $\mathbf{GI}_{k^n}$ не симметрична, то необходимо построить алгоритм обратного преобразования (2.8), который будет отличаться от прямого преобразования.

Разложение (2.9) и задает алгоритм и для обратного преобразования. В этом случае матрица преобразования

$$\mathbf{GI}_{k^n}^T = R_n^T \cdot R_{n-1}^T \ldots R_1^T. \tag{2.11}$$

Оценим теперь количество операций обратного преобразования. Обозначим через $D_0(1)$ и $D_1(1)$ количество операций сложения и умножения, необходимое на выполнение преобразования $\mathrm{A}_k^T f^T$. Тогда на умножение на матрицу R_i^T $i=1, 2, \ldots, n$ требуется:

$k^{i-1}D_0(1)$ операций сложения и

$k^{i-1}D_1(1)$ операций умножения.

Таким образом, на выполнение обратного преобразования необходимо

$D_0(1)\dfrac{k^n-1}{k-1}$ операций сложения и

$D_1(1)\dfrac{k^n-1}{k-1}$ операций умножения.

На рис. 4 приведен граф обратного быстрого гибридного преобразования Фурье—Хаара для матрицы порядка 9.

Приведенный алгоритм обратного преобразования обобщенных матриц Хаара при $k=2$ совпадает с алгоритмом быстрого преобразования классических матриц Хаара.

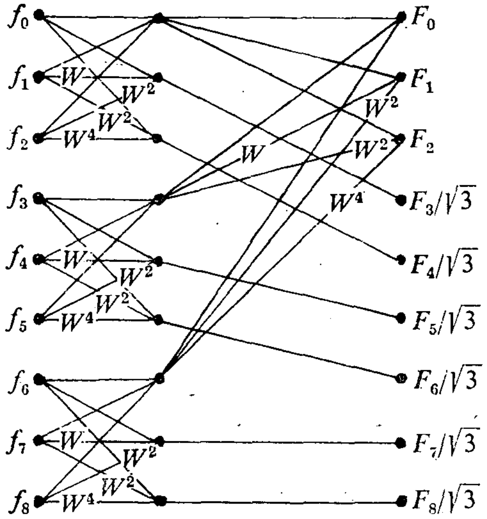

Рис. 3
Граф быстрого гибридного преобразования Фурье—Хаара для матрицы порядка 9

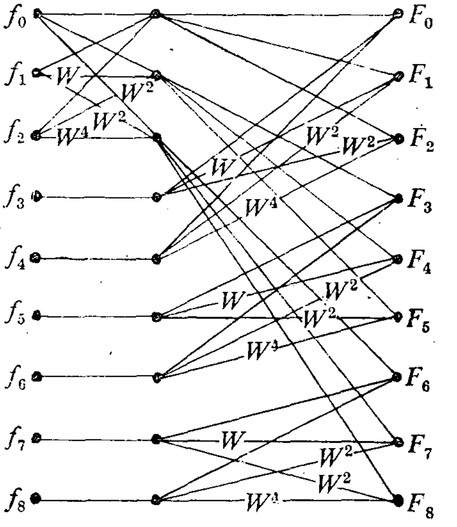

Рис. 4
Граф быстрого обратного гибридного преобразования Фурье—Хаара для матрицы порядка 9

Приведем подпрограмму быстрого обратного гибридного преобразования FINGHR. Как и подпрограмма прямого преобразования, использует подпрограммы для обратных R-преобразований FINR.

```
  SUBROUTINE FINGHR (K, M, N, FØ, F)
  DIMENSION FØ(N), A(K), F(N)
  I1=1
  DO 1 I=1, N
1 F(I)=FØ (I)
  DO 2 I=1, M
  I2=K**(M-I)
  DO 5 J=1, I1
  A(1)=Ø
  DO 4 L=2, K
4 A(L)=F(I1+(K-1)*(J-1)+L-1)
  CALL FINR (K, A, A)
  DO 5 N2=1, K
  A(N2)=A(N2)+F(I2*(N2-1)+1)
  DO 5 L=1, I2
5 F(I2*(N2-1)+L)=A(N2)
2 I1=I1*K
  RETURN
  END
```

Поскольку в подпрограммах FGHR и FINGHR не выполнялись нормировочные умножения на $\sqrt{k^{n-i}}$, приводится подпрограмма GHNORM, которая применяется для соответствующей нормировки массива A длинной $N=K^M$ и должна выполняться после прямого или обратного преобразований.

```
  SUBROUTINE HNORM (K, M, A)
  DIMENSION A(N)
  DO 1 I=1, K
1 A(I)=A(I)/K**M
  DO 2 II=2, M
  I=II-1
  A=1./K**(M-I)
  JMIN=K**I+1
  JMAX=K**II
  DO 2 J=JMIN, JMAX
2 A(J)=A(J)*A
  RETURN
  END
```

§ 3. Обобщенные матрицы и функции Хаара второго типа

3.1. Определение обобщенных матриц и функций Хаара второго типа. Перейдем ко второму обобщению матриц Хаара $\mathbf{HA}_{2^n}$. Обобщенными матрицами Хаара второго типа назовем квадратные ортогональные матрицы, состоящие из 0 и $\pm\sqrt{2^m}$, m-натуральное число, фиксированное в строке, и будем обозначать $\mathbf{GII}_N$.

Определение [12]. Квадратные $(0, \pm 1)$ матрицы X_i, $i=1, 2, \ldots, s$ порядка k назовем s-элементным гиперкаркассом, если они удовлетворяют условиям:

1. $X_i * X_j = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \ldots, s$

где $*$-адамарово произведение [13],

2. $\sum\limits_{i=1}^{s} X_i \quad - \quad (-1, +1)$ матрица,

3. $X_i X_j^T = X_j X_i^T$,

4. $\sum\limits_{i=1}^{s} X_i X_i^T = k\mathbf{I}_k$.

Определение [13]. Матрицы **A** и **B** называются специальными, если

$$\mathbf{AB}^T = -\mathbf{BA}^T.$$

Лемма. Матрицы $\mathbf{HA}_{2^n}$ и $S_{2^n}\mathbf{HA}_{2^n}$, где

$$S_{2^n} = \mathbf{I}_{2^{n-1}} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad S_{2^n} = \mathbf{I}_{2^{n-1}} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

являются специальными матрицами Хаара.

В работах [11, 12] приводятся методы построения s-элементных, $s=2, 4$, гиперкаркассов.

Теорема. Пусть $\mathbf{HA}_{01}$ и $\mathbf{HA}_{02}$-специальные матрицы Хаара порядка p_0, а X_1 и X_2 2-элементный гиперкаркас порядка p_1, тогда

$$\mathbf{GII}_{0,\,i} = \mathbf{HA}_{0,\,i}, \quad i = 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{GII}_{n,\,1} &= X_1 \otimes \mathbf{GII}_{n-1,\,1} + X_2 \otimes \mathbf{GII}_{n-1,\,2} \\ \mathbf{GII}_{n,\,2} &= X_1 \otimes \mathbf{GII}_{n-1,\,2} - X_2 \otimes \mathbf{GII}_{n-1,\,1} \end{aligned}\right\} n = 1, 2, \qquad (3.1)$$

являются специальными обобщенными матрицами Хаара второго типа порядка $p_0 p_1^n$.

Обобщенные матрицы Хаара второго типа порядка $N = p_0 p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ строятся следующим образом. Выбирается матрица Хаара порядка p_0, гиперкаркас $\{X_1, X_2\}$ порядка p_1 и α_1 раз применяются формулы (3.1). Затем построенная $\mathbf{GII}_{n,1}$ порядка $p_0 p_1^{\alpha_1}$ берется в качестве исходной, выбирается гиперкаркасс порядка p_2 и α_2 раз применяется (3.1) и т. д.

Приведем в качестве примера обобщенную матрицу Хаара второго типа порядка 8.

$$\mathbf{GII}_8 = \begin{Vmatrix} + & + & + & + & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & - & - \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ + & + & - & - & + & + & + & + \\ - & - & - & - & + & + & - & - \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{Vmatrix},$$

Для определения счетной системы функций Хаара второго типа несколько модифицируем построение (3.1). Определим обобщенные матрицы Хаара второго типа $\mathbf{GII}_{n,i}$ $i=1, 2$. Пусть первая строка X_1, (X_1 и X_2 2-элементный гиперкаркасс) состоит из $+1$, а R_n-квадратная матрица порядка n с элементами r_{ij}.

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = (i-1)p + l(i) \\ 0, & \text{если} \quad j \neq (i-1)p + l(i) \end{cases}$$

$l(i)=k$, если $i \in [(k-1)p_1^{n-1}p_0, kp_0p_1^{n-1}]$, $k=1, 2, \ldots, p$.

Положим

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{GII}}_{0,i} &= \mathbf{GII}_{0,i}, \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{GII}_{n,1} &= \overline{\mathbf{GII}}_{n-1,1} \otimes X_1 + \overline{\mathbf{GII}}_{n-1,2} \otimes X_2 \\ \mathbf{GII}_{n,2} &= \overline{\mathbf{GII}}_{n-1,2} \otimes X_1 - \overline{\mathbf{GII}}_{n-1,1} \otimes X_2 \\ \overline{\mathbf{GII}}_{n,i} &= R_n \cdot \mathbf{GII}_{n,i} \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Определим функции Хаара второго типа по следующему:

$$XII(m, x) = g(m, n), \quad \text{если} \quad x \in \left[\frac{n-1}{p_0 p_1^k}; \ \frac{n}{p_0 p_1^k}\right)$$

где $g(m, n)$-элементы матрицы $\overline{\mathbf{GII}}_{p_0 p_1^k}$ порядка $p_0 p_1^k \geqq m$.

В качестве примера приведем $\mathbf{GII}_8$ и $\overline{\mathbf{GII}}_8$, полученные по (3.2),

$$\mathbf{GII}_8 = \begin{Vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\overline{\mathrm{GII}_8} = \left\| \begin{matrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

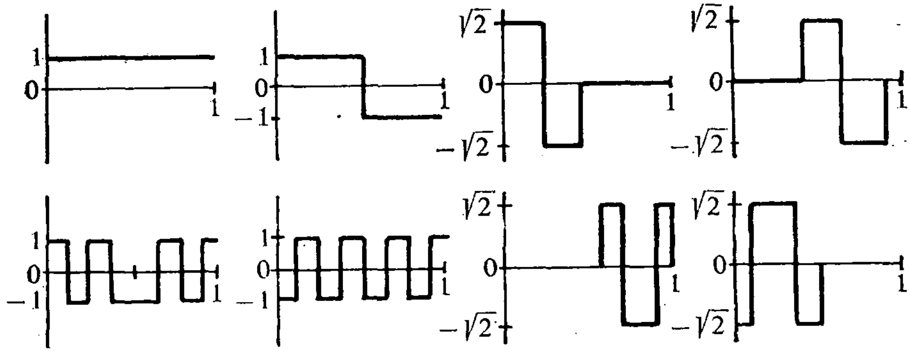

Рис. 5

На рис. 5 приводится функция Хаара второго типа, соответствующие матрице $\overline{\mathrm{GII}_8}$.

Вернемся к построению (3.1). Обобщен ные матрицы Хаара второго типа близки по структуре к матрицам Адамара, построенным в работе [11], строки же матрицы GII_N представляют собой склеенные функции Хаара. Это уже обобщение с другой позиции, в отличие от GI_N, структура которых совпала со структурой матриц Хаара. Естественно ожидать, что GII_N, в силу близости к матрицам Адамара, будут декоррелировать данные лучше классического преобразования Хаара.

3.2. Свойства обобщенных матриц и функций Хаара второго типа.

1. Матрицы Хаара второго типа ортогональны, т. е.

$$\mathrm{GII}_N \cdot \mathrm{GII}_n^T = N\mathrm{I}_N.$$

2. Функции Хаара второго типа $\{XII(m, x)\}_{m=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему функций, т. е.

$$\int_0^1 XII(m, x) \cdot XII(n, x)\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = m \\ 0, & \text{если} \quad n \neq m. \end{cases}$$

3. Элементы матрицы GII_N имеют вид $\lambda_i a_{ij}$, где a_{ij} есть $+1$ или -1, а $\lambda_i = \sqrt{2^{m(i)}}$.

4. Относительно рядов Фурье по системе $\{XII(m, x)\}_{m=0}^{\infty}$ справедливы теоремы п. 2.2.7 с последовательностью $m_n = p_0 p_1^n$.

3.3. Алгоритм быстрого преобразования по $\mathbf{GII}_N$ матрицам. Воспользовавшись блочной структурой $\mathbf{GII}_N$ матриц, можно построить быстрые алгоритмы преобразований по этим матрицам. Основная идея таких алгоритмов состоит в том, чтоб, используя рекуррентные формулы (3.1), разбить исходный вектор на более короткие вектора, преобразования которых, будучи скомбинированы определенным образом, дадут преобразование исходной последовательности. Алгоритм быстрого преобразования задается разложением матрицы $\mathbf{GII}_N$ в произведение слабозаполненных матриц. В работе [12] доказана

Теорема. Пусть $\mathbf{HA}_{0,2} = S_{p_0}\mathbf{HA}_{0,1}$, где $S_{p_0} = \mathbf{I}_{p_0/2} \otimes \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ или $S_{p_0} = \mathbf{I}_{p_0/2} \otimes \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ и $\mathbf{GII}_{n,i}$ $i=1, 2$ построены по (3.1), тогда $\mathbf{GII}_{n,1}$ представима в виде обычного произведения слабозаполненных матриц:

$$\mathbf{GII}_{n,1} = M_1 M_2 \ldots M_{n+1} \tag{3.3}$$

$$M_r = \mathbf{I}_{p_1^{r-1}} \otimes [X_1 \otimes \mathbf{I}_{p_0 p_1^{n-2}} + X_2 \otimes S_{p_0 p_1^{n-2}}] \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

$$M_{n+1} = \mathbf{I}_{p_1^n} \otimes \mathbf{GII}_{0,1}. \tag{3.4}$$

Обозначим через $D(N)$ количество операций, необходимое на преобразование матрицы типа (3.1). На умножение сомножителя M_r, $r=1, 2, \ldots, n$ на некоторый вектор потребуется Np_1 операций сложения или вычитания, поскольку в каждой его строке p_1 отличных от 0 чисел. Тогда

$$D(N) = \sum_{i=1}^{n} Np_1 + nD(p_0)$$

и в предложении, что в матрице $\mathbf{GII}_{0,1}$ все элементы ненулевые

$$D(N) = \sum_{i=1}^{n} Np_1 + Np_0 = N(np_1 + p_0).$$

Если $N = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_m}$, то нетрудно получить, что

$$D(N) = N \sum_{i=0}^{m} p_i \alpha_i \leqq N \sum_{i=0}^{m} p_i \log_{p_i} N.$$

Используя разложение (3.3), (3.4) матриц (3.1), можно написать простые программы реализации этих преобразований.

В таблице 1 приведены для сравнения оценки числа операций, необходимых на выполнение введенных и известных преобразований. Оценки приводятся для двумерного случая, т. е. для преобразований над исходной матрицей f вида

$$F = \mathbf{A} f \mathbf{A}^T$$

где $\mathbf{A}$-матрица преобразования.

Таблица 1,

Тип преобразования	Литература	Порядок k исходной матрицы A_k	Порядок N матрицы преобразования	Число операций умножения, $D_1(N)$	Число операций сложения, $D_0(N)$
ХААРА	[6]	–	2^m	–	$2N(2N-2)$
УОЛША	[14]	–	2^m	–	$2N^2\log_2 N$
АДАМАРА	[11]	–	$p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}$	–	$2N^2\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$
slant	[7]	–	2^m	$2N(2N-4)$	$2N\left(N\log_2 N+\frac{N}{2}-2\right)$
ФУРЬЕ	[14–15]	–	$p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}$	$4N^2\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$	$4N^2\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$
Ортогональные (спеиальные)	[12]	–	$p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}$	–	$2N^2\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$
УОЛША—ХААРА	–	2^n	2^{mn}	–	$2N\cdot n\log_2 n\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$
АДАМАРА—ХААРА	–	$p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}$	$(p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m})^k$	–	$2Nk\frac{N-1}{k-1}\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$
slant—ХААРА	–	2^m	2^{mk}	$4N(k-2)\frac{N-1}{k-1}$	$2N\left(k\log_2 k+\frac{k}{2}-2\right)\frac{N-1}{k-1}$
ФУРЬЕ—ХААРА	–	$p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}$	$(p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m})^k$	$2Nk\frac{N-1}{k-1}\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$	$2Nk\frac{N-1}{k-1}\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i$
ХААРА II	–	–	$p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}$	–	$2N^2\left(\sum\limits_{i=0}^{m} p_i\alpha_i+\frac{2(p_0^{\alpha_0}-1)}{p_0^{\alpha_0}}\right)$

Заключение. В настоящей работе обобщаются с двух различных позиций известные матрицы Хаара (преобразования Хаара): вводится

а) матрицы Хаара первого типа содержащие в себе, как частный случай матрицы Хаара,

б) матрицы Хаара второго типа, близкие по структуре к матрицам Адамара.

Метод построения матриц Хаара первого типа позволяет строить гибридные ортогональные системы: Уолша—Хаара, Адамара—Хаара, Фурье—Хаара.

Построенные гибридные системы содержат с одной стороны лучшие свойства ортогональных преобразований Фурье, Уолша, Адамара, slant и Хаара с другой: так, например, гибридные преобразования

— лучше декоррелируют данные чем преобразования Хаара;

— обладают быстрыми алгоритмами выполнения преобразования близким по скоростям к преобразованию Хаара;

— позволяют фрагментно более качественно (по заранее заданным фрагментам) обрабатывать изображения, чем преобразования Хаара;

— аппаратурно легко реализуемые и могут служить основой конструирования автоматических систем распознавания образов, в частности автоматических систем проверки качества плат.

В работе приведены программы реализации быстрых алгоритмов, а также оценки каличества операций выполнения указанных ортогональных преобразований.

Generalized Haar transforms and automatic quality test of printed circuit boards

S. S. Agaian and A. K. Matevosyan

In the given paper the following matrices are introduced:

a) Haar matrices of the first type, which contain partial case Haar matrices;

b) Haar matrices of the second type that by their structure are closer to Hadamard matrices.

The method of construction of Haar matrices of the first type makes it possible to construct the hybrid orthogonal systems of Walsh—Haar, Hadamard—Haar, Slant—Haar, Foury—Haar.

The constructed hybrid systems have the best properties of orthogonal transforms of Foury, Walsh, Hadamard on the one hand and of Haar ones on the other hand: So, for instance the hybrid transforms

— decode better Haar transforms;

— have rapid algorithms of transforms carryingouts which are close to Haar transform;

— makes it possible fragmently more qualitatively (for initially given fragments) to process pictures than Haar transforms;

— can be easier realized and can be used as a basis for construction of automatic pattern recognition systems particularly automatic systems of printed circuit board quality verification.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
УЛ. П. СЕВАКА, I
375 044 ЕРЕВАН—44, СССР

Литература

[1] Tou, J., R. Conzalez, *Pattern recognition principles*, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
[2] Wintz, P., Transform picture coting, *Proc. IEEE*, v. 60, N7, 1972.
[3] Hotelling, H., Analysis of a complex of statistical variables into principal components, *J. Educ. Psychology*, v. 24, 1933.
[4] Рабинер, Л., Б. Гоулд, Теория и применение цифровой обработки сигналов, *Мир*, 1978.
[5] Beauchamp, K. G., *Walsh functions and their applications*, Academic Press, London, 1975.
[6] Kremer, H., Algorithms for the Haar functions and the fast Haar transform, Symposium: Theory and Applications of Walsh functions, Hatfield Polytechnic, England, 1971.
[7] Pratt, W., W. H. Chen, L. Welch, Slant transform image coding, *IEEE Trans. Comm.*, v. COM—22, N8, August, 1974.
[8] Haar, A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.*, v. 69, 1910, pp. 331—371.
[9] Фино, В., Связь между преобразованиями Уолша—Адамара и Хаара, *ТИИЭР*, No 5, 1969.
[10] Луб, Дж. Л., Вероятные процессы, *И. Л.*, 1956.
[11] Агаян, С., А. Матевосян, Быстрое преобразование Адамара, *Труды ВЦ АН Арм. ССР*, No 12, 1980.
[12] Agaian, S. S., Algorithm of Orthogonal matrices fast transform, Proc. of the Fifth European Meeting on Cybernetics and Systems Research, v. 8, B. 1980.
[13] Wallis, D., Street, S. Wallis, *Combinatorics*, Room squares, sum-free set, Hadamard matrices, Lecture Notes in Math., 1972.
[14] Pratt, W. K., J. Kane, H. Andrews, *Proc. IEEE*, v. 57 and 58, 1969.
[15] Andrews, H., *Computer techniques in image processing*, Chap. 5, Academic Press, New York, 1970.

(Поступило 28-ого декабря 1980 г.)