Описание одного класса предельных распределений в одноканальных приоритетных системах

Э. А. Даниелян

1°. Бурное развитие вычислительной техники предъявляет к современной теории массового обслуживания новые требования. Дело в том, что математические модели прохождения программ на ЭВМ являются грубыми приближениями и поэтому не могут целиком опысывать реальные процессы, возникающие при обслуживании вычислительной техники. К тому же, точные результаты, получаемые даже для простых систем, порой настолько сложны, что часто малопригодны для практических применений.

В теории приоритетных систем почти все точные результаты получаются в терминах преобразований Лапласа—Стилтьеса (ПЛС). Однако на практике удобнее оперировать их обращениями, получение которых представляет собой трудную задачу.

Настоящая работа посвящена обращению точных формул для совместного предельного распределения времен ожидания в следующей приоритетной модели.

2°. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов. При фиксированных функциях распределения (ФР) длительностей обслуживания с конечными первыми двумя моментами, в терминах ПЛС в условиях критической загрузки в [1] получен класс предельных распределений для вектора стационарных времен ожидания в случае дисциплин абсолютного и относительного приоритета. Работе [1] предшествовали работы [2, 3].

В [1] вопрос обращения многомерных предельных распределений решен полностью лишь при $r=3$.

Пусть $w_i(i=\overline{1,r})$-стационарное время ожидания i-вызова, ϱ_{i1}-загрузка системы $\overline{1,i}$-вызовами (1-вызовами, ..., i-вызовами) и существуют пределы:

$$\bar{c}_i=\lim_{\varrho_{r1}\uparrow 1} c_i\,(c_i=\varrho_i/\varrho_{i-1},\ \varrho_i=1-\varrho_{i1},\ \varrho_0=1).$$

Из индексов $\overline{1,r}$ выделяем те и только те $1\leqq p_1(=p)<p_2<\ldots<p_m=r$, для которых $\bar{c}_{p_i}=0\ (i=\overline{1,m})$, и разобъем потоки на группы $P_i=\{j\colon p_{i-1}\leqq j<p_i\}$, $P_{m+1}=\{j\colon j>p_m\}$.

Тогда [1] существует предел $(\varrho_{r1}\uparrow 1)$

$$\lim P\{w_j^* < x_j(j=\overline{1,r})\} = \prod_{n=1}^{m+1} \lim P\{w_j^* < x_j(j\in P_n)\}, \tag{1}$$

где $w_j^* = w_j\ (j\in P_1)$, $w_j^* = w_j/Mw_j\ (j\notin P_1)$, M-знак математического ожидания, а предельное распределение одно и то же для дисциплин относительного и абсолютного приоритета.

Настоящая работа посвящена описанию процедуры получения предельных распределений групп $P_i\ (i\geqq 2)$ и основана на том, что в [1] $\lim P\{w_j^* < x_j(j\in P_i)\}$ зависит только от констант $\bar c_j$ группы P_i.

3°. В силу вышесказанного, с целью нахождения [1] предлагается изучить случай дисциплины абсолютного приоритета с дообслуживанием и упростить систему изменениями начальных данных, сохраняющими в пределе неизменными отношения «недогрузок» $\bar c_i$ для данной группы.

Пусть группа фиксирована и содержит k потоков с константами $\bar c_1=0$, $\bar c_2>0, \ldots, \bar c_k>0$. Программа упрощений такова.

1. Приравнять нулю параметры потоков из последующих групп.

2. Потоки предыдущих групп объединить с первым потоком нашей группы и считать первым потоком нашей группы, что не меняет константы нашей группы.

3. Длительности обслуживания всех вызовов считать показательно распределенными с единичным параметром.

4. Положить

$$a_i = (\tilde c_{i-1}\tilde c_i)\varrho(\tilde c_1 = 1,\ \tilde c_i = \bar c_2\ldots\bar c_i,\ i=\overline{2,k};\ \varrho = 1-a_1),$$

где a_i-параметр i-го потока нашей группы.

Тогда предел отношений «недогрузок» равен $(\varrho\downarrow 0)$

$$\lim(1-\sigma_i)/(1-\sigma_{i-1}) = \bar c_i \quad (\sigma_i = a_1+\ldots+a_i,\ i=\overline{1,k},\ \sigma_0=0,\ \sigma=\sigma_k).$$

Изучим полученную приоритетную систему.

4°. Пусть $p_k(n)\ \big(n=(n_1, \ldots, n_k)\big)$-стационарная вероятность наличия в системе в момент t n_1 1-вызовов, $\ldots$, n_k k-вызовов;

$$P_k(z) = \sum p_k(n)\, z_1^{n_1}\ldots z_k^{n_k} \quad z=(z_1, \ldots, z_k).$$

Введением дополнительного события выводим

$$P_k(z)\{[\sigma - az]_1^k + 1 - z_1^{-1}\} = (1-\sigma_k)(1-z_k^{-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} P_k(0^j z)(z_{j+1}^{-1} - z_j^{-1}), \tag{2}$$

где

$$[\sigma - az]_i^j = \sum_{m=i}^{j}(a_m - a_m z_m), \quad (0^j z) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j}, z_{j+1}, \ldots, z_r).$$

Из (2) находим $(z_i^i = \underbrace{(z_i, \ldots, z_i)}_{i})$ уравнение

$$P_k(z_i^i z)\cdot\{\sigma_i(1-z_i)+[a-az]_{i+1}^k+1-z_i^{-1}\}-P_k(0^i z)\cdot(z_{i+1}^{-1}-z_i^{-1}) =$$
$$= (1-\sigma_k)(1-z_k^{-1})+\sum_{j=i+1}^{k-1} P_k(0^j z)(z_{j+1}^{-1}-z_j^{-1}),$$

правая часть которого не зависит от z_i. Подставляем его в левую часть

$$z_i = \varphi_{ki} = (2\sigma_i)^{-1}\cdot\left\{\sigma_i+1+[a-az]_{i+1}^k-\sqrt{(\sigma_i+1+[a-az]_{i+1}^k)^2-4\sigma_i}\right\},$$

откуда следует уравнение для $P_k(0^i, z)$, которое позволяет из (2) вычислить $P_k(z)$:

$$P_k(z) = \frac{(z_k-1)(1-\sigma_k)}{z_1(\sigma-az+1)-1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{z_i-\varphi_{ki}}{z_{i+1}-\varphi_{ki}}. \tag{3}$$

Из (3) вытекает формула $(j=\overline{1, k-1})$

$$P_k(z_j^j z) = \frac{R_{j+1}}{R_j}\cdot\frac{z_j-\varphi_{kj}}{z_{j+1}-\varphi_{kj}}P_k(z_{j+1}^{j+1}z), \tag{4}$$

где

$$R_j = z_j(\sigma_j-\sigma_j z_j+[a-az]_j^k+1)-1 = R_j(\vec{z}_j).$$

5°. В дальнейшем вектор $(\cdot_i, \ldots, \cdot_k)$ обозначается $\vec{\cdot}_k$.

Положим $(i=\overline{1, k};\ s_i\geqq 0)$:

$$\overline{\omega}_{ki}(\vec{s}_i) = M\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}s_i\overline{w}_i\right\},\ \omega_{ki}(\vec{s}_i) = M\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k}s_j w_j\right\},$$

где $\overline{w}_i$-условное стационарное время ожидания i-вызова при условии прекращения с момента ее отсчета поступлений, а w_i-безусловное.

Ясно, что $(i=\overline{1, k};\ s_i\geqq 0)$:

$$\overline{\omega}_{ki}(\vec{s}_i) = M\exp\left\{-s^{(i)}\overline{w}_i-\sum_{j=i+1}^{k}s^{(j)}(\overline{w}_j-\overline{w}_{j-1})\right\} = P_k(u_i^i u) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\omega}_{ki}(\vec{s}^{(i)}),$$

где

$$s^{(i)} = s_i+\ldots+s_k,\ u_i = (1+s^{(i)})^{-1}.$$

В силу (4)

$$\overline{\omega}_{ki}(\vec{s}_i) = T_i(\vec{s}^{(i)})\cdot T_2(\vec{s}^{(i)})\cdot\tilde{\omega}_{ki+1}(\vec{s}_{i+1}), \tag{5}$$

где

$$T_1(\vec{s}^{(i)}) = R_{i+2}(\vec{u}_{i+1})/R_i(\vec{u}_i),$$
$$T_2(\vec{s}^{(i)}) = \left(u_i-\varphi_{ki}(\vec{u}_{i+1})\right)/\left(u_{i+1}-\varphi_{ki}(\vec{u}_{i+1})\right).$$

Можно показать, что $(i=\overline{1, k};\ s_i\geqq 0)\ \omega_{ki}(\vec{s}_i)=\tilde{\omega}_{ki}(\vec{\alpha}_i)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ задаются рекуррентно

$$\alpha_1 = s_1+\alpha_2,\ \alpha_i = y_1\left(\ldots(y_{i-1}(s_i+y_{i+1}^*)\ldots\right),\ y_{k+1}^* \equiv 0,\ y_i^* = y_{i+1}(s_i+y_{i+1}^*).$$

Здесь

$$y_i(s) = s+\frac{a_i}{2\sigma_i}\left\{\sigma_i - s - 1 + \sqrt{(s+\sigma_i+1)^2-4\sigma_i}\right\}.$$

Тогда на основе (5) получаем $(j=\overline{1, k-1})$

$$\omega_{kj}(\vec{s}_j) = T_1(\vec{\alpha}_j)\cdot T_2(\vec{\alpha}_j)\omega_{kj+1}(\vec{s}_{j+1}). \tag{6}$$

6°. Для вычисления пределов $\lim P\{w_j/Mw_j<x_j(j=\overline{1,k})\}$ вводим обозначения $(a\in(0,1);\ j=\overline{2,k})$:

$$\Delta(t) = \sqrt{t+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2},\ \Lambda_a(t) = at+(1-a)\Delta(t),\ s_j^* = \bar{c}_j s_j,$$

$$w^{\{1\}} = s_1+w^{\{2\}},\ w^{\{j\}} = \tilde{c}_{j-1}\Delta(s_j^*+v_{j+1}),\ w^{\{k+1\}} = 0,\ w_j = w^{\{j\}}-w^{\{j+1\}},$$

где $v_m\ (m=\overline{3,k})$ определяются рекуррентно

$$v_m = \bar{c}_{m-1}\Lambda_{\bar{c}_{m-1}}(s_m^*+v_{m+1}),\ v_{k+1} = 0.$$

Полагая $s_i^*=s_i/Mw_i$, произведем при $\varrho\downarrow 0$ выкладки $(i=\overline{1,k};\ j=\overline{2,k};\ s_i\geqq 0)$:

$$Mw_1 \sim \varrho^{-1},\quad Mw_j \sim (\tilde{c}_{j-1}\cdot\bar{c}_j\varrho^2)^{-1},$$

$$y_{j+1}^*(\vec{s}_{j+1}) = \tilde{c}_{j-1}^2\varrho^2 v_{j+1}\big(1+o_\varrho(1)\big),\ \alpha_j^* = \alpha_j(\vec{s}_j^*) = \varrho w^{\{j\}}\big(1+o_\varrho(1)\big),$$

$$D_i(\varrho\cdot\vec{w}^{\{i\}}) = -\varrho^2\left\{c_i w^{\{i\}}+(w^{\{i\}})^2-\sum_{j=k+1}^{k}(\tilde{c}_{j-1}-\bar{c}_j)w^{\{j\}}\right\}\big(1+o_\varrho(1)\big).$$

Приведенные асимптотические соотношения позволяют установить существование пределов: $\lim T_j(\vec{\alpha}_i^*)\ (j=1,2)$, причем

$$\lim_{\varrho\downarrow 0} T_1(\alpha_i)\cdot T_2(\alpha_i^*) = \frac{w^{\{i+1\}}+(\tilde{c}_i/2)+\sqrt{q_i+\dfrac{\tilde{c}_i^2}{4}}}{w^{\{i\}}+(\tilde{c}_i/2)+\sqrt{q_i+(\tilde{c}_i^2/4)}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} I_i(\vec{s}_i), \tag{7}$$

где

$$q_i = \sum_{j=i+1}^{k}\tilde{c}_{j-1}(1-\bar{c}_j)\cdot w^{\{j\}}.$$

Наконец, обозначив $\hat{\omega}_{ki}(\vec{s}_i)=\lim\omega_{ki}(\vec{s}_i^*)$, получаем

$$\hat{\omega}_{kj}(s_j) = I_j(\vec{s}_j)\cdot\hat{\omega}_{kj+1}(\vec{s}_{j+1}).$$

Таким образом, вопрос получения предельного распределения группы сводится к вопросу обращения функций $I_j(\vec{s}_j)\ (j=\overline{1,k})$, выписанного в (7) в терминах величин $w^{\{j\}}$.

7°. Произведя переобозначения

$$\lambda_j = \frac{w^{(j+1)}}{\tilde{c}_j},\ v_j = \frac{\tilde{c}_{j-1}^2}{\tilde{c}_j^2}(1-\bar{c}_j),\ \mu_i = \frac{w^{(i)}-w^{(i+1)}}{\tilde{c}_i},$$

получаем

$$I_i = \int\limits_0^\infty e^{-\mu_i x}\, dC_i(x), \tag{8}$$

где

$$C_i(x) = \exp\left\{-x\left(\lambda_i+\frac{1}{2}+\sqrt{\sum_{j=i}^{k-1} v_j\lambda_j+\frac{1}{4}}\right)\right\}.$$

Воспользовавшись формулой обращения (23.91) из [4]

$$e^{-u\sqrt{\mu}} = \int\limits_0^\infty e^{-\mu v}\Psi(u, v)\,dv,\ \Psi(u, v) = \frac{u}{2v\sqrt{\pi v}}\exp(-u^2/4v),$$

имеем

$$C_i(x) = e^{-\lambda_i x}\int\limits_0^\infty e^{-x/2}\exp\left\{-\left(\sum_{j=i}^{k-1} v_j\lambda_j+\frac{1}{4}\right)v\right\}\Psi(x, v)\,dv,$$

что путем преобразований сводится к многомерному интегралу

$$C_i(x) = v_i^{-1}\underbrace{\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty}_{k-i}\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k-1}\lambda_j t_j\right\}\chi(t_i > x)\,d_{t_i}\ldots d_{t_k}\left\{e^{-x/2-\frac{v-x}{4v_i}}\right.$$

$$\left.\Psi\left(x, v_i^{-1}(v-x)\right)\chi\left(v_i \min_{i+1\leq j<k+1}(v_j^{-1}t_j) > v-x\right)dv\right\},$$

где

$$\chi(u > v) = \begin{cases} 1,\ u > v,\\ 0,\ u \leq v.\end{cases}$$

Подставляя последнее выражение для $C_i(x)$ в правую часть (8), после замен $t_i' = t_i + x$, $\bar{c}_{i-1}x = t_{i-1}'$ с использованием равенства $\bar{c}_i^{-1}\lambda_{i-1} = \mu_i + \lambda_i$, получаем

$$I_i = \underbrace{\int\limits^\infty\ldots\int\limits^\infty}_{k-i+1}\exp\left\{-\sum_{j=i-1}^{k-1}\lambda_j t_{j+1}\right\}d_{t_i}\ldots d_{t_k}\Phi(\bar{t}_i),$$

где

$$\Phi(\bar{t}_i) = -\int\limits_0^{t_{i+1}} v_i^{-1}\exp\left(-\frac{\bar{c}_i t_i}{2}-\frac{v}{4v_i}\right)\Psi(\bar{c}_i t_i, v_i^{-1}v)\chi\left(v_i \min_{i+2\leq j\leq k}(v_{j-1}^{-1}t_j) > v\right)dv.$$

Произведено обращение I_j при условии, что параметрами ПЛС служат величины λ_j $(j=\overline{i, k})$.

8°. Обратим I_j, считая параметрами ПЛС $v_j\ (j=\overline{i+2, k})$.

$$d_{t_i}\dots d_{t_k} = -v_i^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{t_{i+1}}{4v_i}\right)dt_{i+1}\right\}.$$

$$\left\{d_{t_i}[e^{-(\bar{c}_i t_i/2)}\Psi(\bar{c}_i t_i,\ v_i^{-1}t_{i+1})]\right\}\cdot\left\{\prod_{j=i+2}^{k} d_{t_j}\left[\chi\left(t_j > \frac{t_{i+1}v_{j-1}}{v_i}\right)\right]\right\}.$$

После несложных преобразований находим

$$I_i = \int_0^\infty\dots\int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{j=i}^{k} s_{j-1}^* z_j\right\}\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k} v_j z_j\right\}\Phi_1(\vec{z}_i)\,dz_i\dots dz_k,$$

где

$$\Phi_1(\vec{z}_i) = e^{-\frac{1}{4}\sum_{j=i}^{k} z_j}\left[\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} e^{-\frac{y}{4v_i}+\frac{x+y}{2}}\prod_{j=i}^{k} e^{\frac{yv_{j-1}}{v_i}}\Psi\left(\frac{yv_{i-1}}{v_i},\ z_j\right)\right].$$

$$d_x\{e^{-(\bar{c}_i x/2)}\Psi(\bar{c}_i x,\ v_i^{-1}y)\}\,dy.$$

9°. Так как

$$v_j = \beta_{j-1}\cdot(s_j^*+v_{j+1})+\gamma_{j-1}\cdot\left\{\sqrt{s_j^*+v_{j+1}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right\}\quad (\gamma_j = \bar{c}_j(1-\bar{c}_j),\ \beta_j = \bar{c}_j^2),$$

то

$$\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k} v_j z_j\right\} = \underbrace{\int_0^\infty\dots\int^\infty}_{k-i+1}\exp\left\{\sum_{j=i+1}^{k} v_j t_{j-1}\right\}\Phi_2(\vec{z}_i,\ \vec{t}_i). \tag{9}$$

$$\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k}(t_j+\beta_{j-1}z_j)s_j^*\right\}d_{t_i}\dots d_{t_k},$$

где

$$\Phi_2(\vec{z}_i,\ \vec{t}_i) = \prod_{j=i}^{k} e^{-t_j\left(z_j\beta_{j-1}+\frac{1}{4}\right)+\frac{\gamma_{j-1}z_j}{2}}\Psi(\gamma_{j-1}z_j,\ t_j).$$

В силу (9) просто проверяется, что

$$\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k} v_j z_j\right\} = M\exp\left\{-\sum_{j=i}^{k} s_j^* W_j^i(\vec{z}_i)\right\},$$

где вектор-процесс

$$\vec{W}_i(\vec{z}_i) = (W_i^i(\vec{z}_i),\ \dots,\ W_k^i(\vec{z}_i))$$

определяется рекуррентно следующим образом

$$\vec{W}_i(\vec{z}_i) = (0,\ W_{i+1}(\vec{Y}_i^{(0)}(\vec{z}_i)))+\vec{E}_i(\vec{z}_i)+\vec{Y}_i(z_i)$$

Здесь $\vec{W}_{i+1}(\vec{t}_{i+1})$ не зависит от $\vec{W}_i(z_i)$,

$$\vec{E}_i(z_i) = (\beta_{i-1}z_i,\ \dots,\ \beta_{k-1}z_k),$$

а

$$\vec{Y}_i(\vec{z}_i) = (\vec{Y}_i^{(0)}(\vec{z}_i),\ Y_k^i(\vec{z}_i))\quad (\vec{Y}_i^{(0)}(\vec{z}_i) = (Y_i^i(\vec{z}_i),\ \dots,\ Y_{k-1}^i(\vec{z}_i)))$$

имеет плотность $\Phi_2(\vec{z}_i,\ \vec{t}_i)$

Последнее влечет за собой следующую рекуррентную связь

$$A_j(\vec{z}_j;\, \vec{x}_j) = \int\limits_{t_k=0}^{[x_k-\beta_{k-1} z_k]^+} dt_k \underbrace{\int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty}_{k-j} A_{j+1}(t_j;\, \dots;\, t_{k-1};\, x_j, \dots, x_{k-1})$$

$$\Phi_2(\vec{z}_j;\, \vec{t}_j)\, dt_j \dots dt_{k-1},$$

где

$$A_i(\vec{t}_i;\, \vec{y}_i) = P\{\vec{W}_i(\vec{t}_i) < \vec{y}_i\},$$

откуда выводим

$$I_i = \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\sum_{j=i}^{k} s_{j-1}^* z_j\right\} \Phi_3(\vec{z}_i)\, dz_i \dots dz_k.$$

Здесь

$$\Phi_3(\vec{z}_i) = \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \Phi_1(\vec{z}_i - \vec{x}_i) d_{x_i} \dots d_{x_k} A_i(\vec{z}_i - \vec{x}_i;\, \vec{x}_i).$$

Процедура обращения полностью обрисована.

Description of a class of limit distributions in single server priority queues

E. A. Danielian

In a single server queuing system with waiting room r streams of customers are arriving. It is supposed that the first two moments of the serving distribution functions are finite.

Let $w_i(i=\overline{1,r})$ be the stationary waiting time of the i-th stream's customers, and ϱ_{i1} be the traffic intensity of customers of the first i streams.

It is known that in the case of FIFO and LIFO priority disciplines and $\varrho_{r1}\uparrow 1$ the joint distribution function of $w_i(i=\overline{1,r})$ under some normalization has a limit, which is found in terms of a multidimensional Laplace—Stiltjes transform.

In the paper a procedure for finding the corresponding multidimensional distribution function is described.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
УЛ. П. СЕВАКА, I
375044 ЕРЕВАН—44, СССР

Литература

[1] Даниелян, Э. А., Н. С. Земляной, Класс предельных распределений совместного стационарного распределения времен ожидания некоторых систем $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в условиях критической загрузки, *ДАН Арм. ССР*, том LXX, № I, 1980, стр. 3—10.

[2] Азларов, Т. А., Я. М. Хусаинов, Предельные теоремы для системы обслуживания, с абсолютным приоритетом в условиях большой загрузки, *Известия АН Узб. ССР* серия физ.-мат. наук, № 6, 1974, стр. 53—55.

[3] Azlarov, T. A., Ja. M. Husainov, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1976, pp. 575.

[4] Диткин, В. А., А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению М, Высшая школа, 1965.

(Поступило 5-ого декабря 1980 г.)