О сложности реализации булевых функций с данным вектором активностей

А. В. Петросян, В. А. Варданян

Рассмотрим задачу реализации булевых функций с данным вектором активностей схемами из функциональных элементов в базисе $\{\vee, \&, -\}$.

Введем следующие обозначения:

B^n — n — мерный единичный куб;

N_f — множество наборов из B^n — на которых булевая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1;

$|A|$ — число элементов множества A.

Вектор $\omega^f = (\omega_1^f, \ldots, \omega_n^f)$ называется вектором активностей функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, а число ω_i^f называется активностью функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по i-й координате, если

$$\omega_i^f = \frac{1}{2^n} \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n} \left(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \oplus f(\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_i, \ldots, \alpha_n)\right), \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Подробно об активностях можно найти в работе [4].

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$-набор n вещественных чисел, для которых $\omega_i = \frac{\eta_i(n)}{2^{n-1}}$, $\eta_i(n)$-целочисленные параметры, $0 < \eta_i(n) \leqq 2^{n-1}$, $1 \leqq i \leqq n$. Через $\Phi_n(\overline{\omega})$ обозначим класс функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $\omega_i^f \leqq \omega_i$, $1 \leqq i \leqq n$.

Пусть $L(f)$ — наименьшая из сложностей схем реализующих функцию f, и $L(\Phi_n(\overline{\omega})) = \max_{f \in \Phi_n(\overline{\omega})} L(f)$.

В настоящей работе устанавливаются верхние и нижние оценки для сложности $L(\Phi_n(\overline{\omega}))$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $\Phi_n(\overline{\omega})$. Рассмотрим ее разложение по переменной x_1:

$$f(x_1, \ldots x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

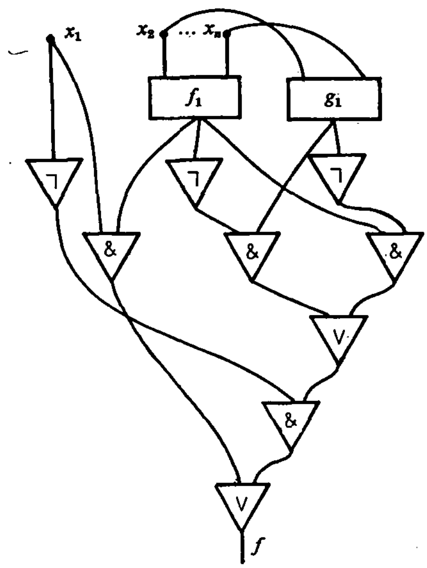
$$f_1(x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$g_1(x_2, \ldots, x_n) = f_0(1, x_2, \ldots, x_n) \oplus f_0(0, x_2, \ldots, x_n)$$

Заметим, что $|N_{g_1}| = \omega_1^{f_0} 2^{n-1} = \omega_1^{f} 2^{n-1}$. Легко видеть, что разложение (1) может быть представлено в виде

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f_1 \vee \bar{x}_1 (f_1 \oplus g_1). \tag{2}$$

Следовательно (см. рис.)



$$L(f) = L(f_0) \leqq L(f_1) + L(g_1) + 9 \tag{3}$$

Рассмотрим последовательные разложения функций

$$f_j(x_{j+1}, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, k-1:$$

$$f_j(x_{j+1}, \ldots, x_n) = x_{j+1} f_{j+1}(x_{j+2}, \ldots, x_n) \vee$$

$$\vee \bar{x}_{j+1}(f_{j+1}(x_{j+2}, \ldots, x_n) \oplus g_{j+1}(x_{j+2}, \ldots, x_n))$$

где

$$f_{j+1}(x_{j+2}, \ldots, x_n) = f_j(1, x_{j+2}, \ldots, x_n)$$

$$g_{j+1}(x_{j+2}, \ldots, x_n) = f_j(1, x_{j+2}, \ldots, x_n) \oplus f_j(0, x_{j+2}, \ldots, x_n).$$

Тогда ясно, что

$$L(f_j) \leqq L(f_{j+1}) + L(g_{j+1}) + 9, \quad 1 \leqq j \leqq k-1. \tag{4}$$

Складывая соответственно левые и правые части неравенств (3) и (4) при $1 \leqq j \leqq k-1$, получаем, что

$$L(f) \leqq L(f_k) + \sum_{i=1}^{k} L(g_i) + 9k \tag{5}$$

По известной теореме Лупанова [1, 2] функцию $f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ можно реализовать схемой сложности не более $\frac{2^{n-k}}{n-k}\left(1+O\left(\frac{\log(n-k)}{n-k}\right)\right)$. Другими словами,

$$L(f_k) \leqq \frac{2^{n-k}}{n-k}\left(1+o(1)\right).$$

Положим $k=[n-2\log n]$, где $[x]$—целая часть чусла x. Тогда $L\left(f_{[n-2\log n]}\right) \leqq \leqq \frac{n^2}{\log n}\left(1+o(1)\right)$ и из неравенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} L(f) &\leqq \frac{n^2}{\log n}\left(1+o(1)\right) + \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} L(g_i) + 9(n-2\log n) \leqq \\ &\leqq \frac{n^2}{\log n}\left(1+o(1)\right) + \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} L(g_i). \end{aligned} \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что

$$|Ng_i| = \omega_i^{f_{i-1}} 2^{n-i} \leqq \omega_i^f 2^{n-1} \leqq \omega_i 2^{n-1}, \quad 1 \leqq i \leqq [n-2\log n] \tag{7}$$

Теорема 1. Если $\omega_i = O\left(\frac{\varphi(n)}{2^{n-1}}\right)$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$, где $\varphi(n)$ — целочисленный параметр, $1 \leqq \varphi(n) \leqq 2^{n-1}$, $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$L\left(\Phi_n(\bar{\omega})\right) \lesssim n2^{n-1} \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \omega_i = O\left(n^2\varphi(n)\right).$$

Доказательство. Для реализации функций g_i, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$ используем метод синтеза, основанный на совершенной дизъюнтивной нормальной форме [3]. Тогда, учитывая неравенства (7), получаем, что

$$L(g_i) \leqq (n-i)(\omega_i^{f_{i-1}} 2^{n-i}+1) - 1 \leqq n(\omega_i 2^{n-1}+1) - 1.$$

Таким образом из (6) следует, что

$$L(f) \leqq \frac{n^2}{\log n}\left(1+o(1)\right) + n(n-2\log n) + n2^{n-1} \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \omega_i. \tag{8}$$

Если $\omega_i = O\left(\frac{\varphi(n)}{2^{n-1}}\right)$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$, где $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то главной частью в выражении (8) будет $n2^{n-1} \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \omega_i$, другими словами

$$L(f) \lesssim n2^{n-1} \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \omega_i = O\left(n^2\varphi(n)\right)$$

Так как правая часть последнего неравенства не зависит от конкретной функции, то получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Верхняя оценка, полученная в теореме 1, в некоторых случаях можно улучшить, если при реализации функций g_i используем методы Финикова и Лупанова [1] для реализации функций с данным числом единиц.

Теорема 2. 1) Если $\omega_i = O\left(\frac{\log n}{2^{n-1}}\right)$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$, то $L(\Phi_n(\bar\omega)) \lesssim cn^2$, где $c=\mathrm{const}$.

2) Если $\omega_i \leqq \frac{1}{2}$ и $\frac{\omega_i 2^{n-1}}{\log n} \to \infty$, при $n \to \infty$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$ то

$$L(\Phi_n(\bar\omega)) \lesssim \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \frac{\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}}{\log\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}}.$$

Доказательство. Если $\omega_i = O\left(\frac{\log n}{2^{n-1}}\right)$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$, то учитывая неравенства (7) и результат Финикова [1], получаем, что $L(g_i) \lesssim n$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$. Тогда из (6) следует утверждение 1).

Если $\frac{\omega_i 2^{n-1}}{\log n} \to \infty$, то из неравенства (7) на основании результата Лупанова [1] имеем, что

$$L(g_i) \lesssim \frac{\log C_{2^{n-i}}^{\omega_i^{f_{i-1}} 2^{n-i}}}{\log\log C_{2^{n-i}}^{\omega_i^{f_{i-1}} 2^{n-i}}} \leqq \frac{\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i^f 2^{n-1}}}{\log\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i^f 2^{n-1}}}.$$

Следовательно, из (8) получаем, что

$$L(f) \lesssim \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \frac{\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i^f 2^{n-1}}}{\log\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i^f 2^{n-1}}}.$$

В силу того, что $\omega_i \leqq 1/2$, $1 \leqq i \leqq [n-2\log n]$, из последнего неравенства следует, что

$$L(f) \lesssim \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \frac{\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}}{\log\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}}.$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от функции f, откуда и вытекает утверждение 2).

Замечание. Используя таблицу сложностей классов функций для некоторых значений числа единиц, приведенную в [1], находим соответствующие асимптотики для верхней оценки $L(\Phi_{n+1}(\bar\omega))$.

Нижние оценки для $L(\Phi_n(\bar\omega))$ получаются из «мощностных соображений» [1, 2], основанные на следующем утверждении.

$\omega_i,\ 1 \leq i \leq [n+1-2\log(n+1)]$	$L(\Phi_{n+1}(\bar\omega))$
$\dfrac{(\log n)^c}{2^n},\quad c>1$	$n^2(\log n)^{c-1}$
$\dfrac{n^c}{2^n},\quad c>0$	$\dfrac{n^{c+2}}{(c+1)\log n}$
$2^{n^c-n},\quad 0<c<1$	$n^{2-c}2^{n^c}$
$2^{(c-1)n},\quad 0<c<1$	$\dfrac{1-c}{c}n2^{cn}$
$\dfrac{1}{\psi(n)}$, где $\psi(n)\to\infty,\quad \dfrac{\log\psi(n)}{n}\to 0$ в частности $\dfrac{1}{n^c},\quad c>0$	$\dfrac{2^n\log\psi(n)}{\psi(n)}$ $\dfrac{c2^n\log n}{n^c}$
$\alpha,\quad 0<\alpha\leq\dfrac{1}{2}$	$\beta 2^n$, где $2^{-\beta}=\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}$

Лемма

$$|\Phi_n(\bar\omega)|>\left(\frac{2}{\omega_i}\right)^{\omega_i 2^{n-1}},\quad \omega_i=\min_{1\leq j\leq n}\omega_j$$

Доказательство. Через Φ_{ω_i} обозначим класс функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $\omega_i^f=\omega_i$, и из равенства $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)=f(\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ следует, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)=f(\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_i, \ldots, \alpha_n)=0$.

Нетрудно проверить, что если $f\in\Phi_{\omega_i}$, то $\omega_j^f\leq\omega_i^f$, $1\leq j\leq n$. Следовательно, $\Phi_{\omega_i}\subset\Phi_n(\bar\omega)$, $|\Phi_{\omega_i}|<|\Phi_n(\bar\omega)|$.

Легко видеть, что $|\Phi_{\omega_i}|=C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}\cdot 2^{\omega_i 2^{n-1}}\geq$ (использовали неравенство $C_n^k>\left(\frac{n}{k}\right)^k$) $\geq\left(\frac{2^{n-1}}{\omega_i 2^{n-1}}\right)^{\omega_i 2^{n-1}}\cdot 2^{\omega_i 2^{n-1}}$ откуда и получаем утверждение леммы.

Теорема 3. Если, $\omega_i=\min\limits_{1\leq j\leq n}\omega_j$, $\dfrac{\omega_i 2^{n-1}}{\log n}\to\infty$ при $n\to\infty$, то

$$L(\Phi_n(\bar\omega))\gtrsim\frac{\omega_i 2^{n-1}(1-\log\omega_i)}{\log(\omega_i n 2^{n-1})}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ при $k(n)=$ $=(1-\varepsilon)\dfrac{\omega_i 2^{n-1}(1-\log\omega_i)}{\log(\omega_i n2^{n-1})}$ и $n\to\infty$ справедливо соотношение $\dfrac{N(n,k(n))}{|\Phi_n(\bar\omega)|}\to 0$ $(n\to\infty)$, где $N(n,k)$ — число различных неприводимых схем сложности не более k (см. [1, 2]).

Известно (см. [1, 2]), что $N(n, k(n)) \leqq (16(n+k(n)))^{n+k(n)+3}$. Из этого неравенства и леммы имеем

$$\log \frac{N(n, k(n))}{|\Phi_n(\bar{\omega})|} = \log N\left(n, \frac{(1-\varepsilon)\omega_i 2^{n-1}(1-\log \omega_i)}{\log(\omega_i n 2^{n-1})}\right) - \log |\Phi_n(\bar{\omega})| \leqq$$

$$\leqq \left[(1-\varepsilon)\frac{\omega_i 2^{n-1}(1-\log \omega_i)}{\log(\omega_i n 2^{n-1})} + n + 3\right]\left[4 + \log\left(n + \frac{(1-\varepsilon)\omega_i 2^{n-1}(1-\log \omega_i)}{\log(\omega_i n 2^{n-1})}\right)\right] -$$

$$-\omega_i 2^{n-1}(1-\log \omega_i) \to -\infty,$$

при $n \to \infty$, если $\frac{\omega_i 2^{n-1}}{\log n} \to \infty$. Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. Если $\omega_j \leqq 1/2$, $1 \leqq j \leqq [n-2\log n]$ и $\frac{\omega_i 2^{n-1}}{\log n} \to \infty$ при $n \to \infty$, $\omega_i = \min\limits_{1 \leqq j \leqq n} \omega_j$, то

$$\frac{\omega_i 2^{n-1}(1-\log \omega_i)}{\log(\omega_i n 2^{n-1})} \lesssim L(\Phi_n(\bar{\omega})) \lesssim \sum_{i=1}^{[n-2\log n]} \frac{\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}}{\log\log C_{2^{n-1}}^{\omega_i 2^{n-1}}}.$$

Следствие 2. Если $\omega_i = \frac{n^s}{2^{n-1}}$, $s > 0$, $1 \leqq i \leqq n$, то

$$\frac{n^{s+1}}{(s+1)\log n} \lesssim L(\Phi_n(\bar{\omega})) \lesssim \frac{n^{s+2}}{(s+1)\log n}.$$

Summary

It is shown in this work that if Boolean functions with restricted activities of arguments are considered then more simple realizing schemes can be constructed. In many partial cases the upper estimations for Shannon function have been recevied and in some cases the lower ones are given as well.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
УЛ. П. СЕВАКА, 1.
375044 ЕРЕВАН-44, СССР

Литература

[1] Лупанов, О. Б., Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования, *Проблемы кибернетики*, вып. 14, М., *Наука*, 1965.

[2] Лупанов, О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем, *Проблемы кибернетики*, вып. 10, М., Физматгиз, 1963.

[3] Яблонский, С. В., Введение в дискретную математику, М., *Наука*, 1979.

[4] Петросян, А. В., Некоторые дифференциальные свойства булевых функций, Совместный сборник ИВТиА Венгерской АН и ВЦ АН Арм. ССР *Некоторые задачи автоматизации проектирования*, Будапешт, 1982.

(Поступило 19-ого января 1982 г.)