Одна задача об ориентированных графах

А. В. Косточка

В настоящей заметке слово «граф» обозначает ориентированный граф без петель и кратных дуг, слово «цикл» — контур без самопересечений, слово «путь» — ориентированный путь. Мы говорим что два цикла пересекаются, если они имеют общие вершины. Если G-граф, то через $V(G)$ обозначается множество вершин G, через $E(G)$ — множество дуг G. Если G-граф, $V_0 \subset V(G)$, то через $G(V_0)$ обозначим подграф графа G, порожденный множеством вершин V_0.

Сильно связный граф назовем (ξ)-графом, если любые два его цикла пересекаются. Сильно связный граф G назовем (ε)-графом, если существует такая вершина $x \in V(G)$, что для любой дуги $\vec{e} \in E(G)$ найдется цикл, проходящий через x и $\vec{e}$. Остальные обозначения и термины, использованные в заметке, общеприняты.

В [1] А. Адам поставил следующую задачу (см. проблему 3):

Существует ли (ξ)-граф, не являющийся (ε)-графом?

В настоящей работе мы отвечаем на этот вопрос отрицательно.

Утверждение. Каждый (ξ)-граф является (ε)-графом.

Доказательство проведем индукцией по числу дуг. Для (ξ)-графов с двумя и тремя дугами утверждение очевидно.

Пусть G — наименьший по числу дуг (ξ)-граф, не являющийся (ε)-графом.

Случай 1. Для любой дуги $\vec{e} \in E(G)$ $G \setminus \vec{e}$ сильно связен. Тогда

$$|E(G)| \geqq |V(G)| + 1. \tag{1}$$

Кроме того, в этом случае для каждой дуги $\vec{e} \in E(G)$ $G \setminus \vec{e}$ (ξ)-граф и, по индукционному предположению, (ε)-граф, т.е. найдется такая вершина $x_{\vec{e}} \in V(G)$, что для любой дуги $\vec{e}' \in E(G) \setminus \vec{e}$ существует цикл, проходящий через $x_{\vec{e}}$ и $\vec{e}'$. Если бы для какой-либо дуги $\vec{e}_0 \in E(G)$ нашелся цикл C_0, проходящий через $x_{\vec{e}_0}$ и $\vec{e}_0$, то утверждение справедливо. Допустим, что такой дуги нет. Тогда для любых двух дуг $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in E(G)$ $(\vec{e}_1 \neq \vec{e}_2)$

$$x_{\vec{e}_1} \neq x_{\vec{e}_2},$$

т.е. $|V(G)| \geqq |E(G)|$, в противоречие с (1).

Случай 2. Существует такая дуга $\overrightarrow{(a, b)} \in E(G)$, что $G \setminus \overrightarrow{(a, b)}$ не сильно связен.

Обозначим через V_1 множество вершин графа $G \setminus \overrightarrow{(a, b)}$, достижимых из a, $V_2 = V(G) \setminus V_1$. Так как $a \in V_1, b \in V_2$, то $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$. В силу того, что в G каждые два цикла пересекаются, либо в $G(V_1)$, либо в $G(V_2)$ нет циклов. Без ограничения общности считаем, что циклов нет в $G(V_2)$ (иначе изменим ориентацию всех дуг). Обозначим $A = \{v \in V_1 | \exists w \in V_2 \colon \overrightarrow{(w, v)} \in E(G)\}$. Допустим, что $a \in A$, т.е. существует такая вершина $v \in V_2$, что $\overrightarrow{(v, a)} \in E(G)$. Так как G сильно связен, то найдется цикл C, проходящий через $\overrightarrow{(v, a)}$. Понятно, что $\overrightarrow{(a, b)} \in E(C)$. Следовательно,

$$V(C) \cap V_1 = \{a\}. \tag{2}$$

Так как G — (ξ)-граф, то каждый цикл в $G(V_1)$, в силу (2), должен проходить через a. Но любой цикл в G проходящий хотя бы через одну вершину из V_2, необходимо проходит через $\overrightarrow{(a, b)}$. Т.е. a — панциклическая вершина. Противоречие. Таким образом, $a \notin A$.

Построим G_1 по следующим правилам:

$$V(G_1) = V_1;\ E(G_1) = E(G(V_1)) \cup \{\overrightarrow{(a, v)} | v \in A \ \&\ \overrightarrow{(a, v)} \notin E(G(V_1))\}.$$

Докажем два свойства графа G_1.

Свойство 1. G_1 сильно связен.

Действительно, выберем произвольную упорядоченную пару $\langle v_1, v_2 \rangle$ вершин в G_1. Если в графе G из v_1 в v_2 вёл путь, не проходящий через $\overrightarrow{(a, b)}$, то этот же путь ведет из v_1 в v_2 и в графе G_1. Если же в G из v_1 в v_2 вёл путь, проходящий через $\overrightarrow{(a, b)}$ и заходящий из V_2 в V_1 по дуге $\overrightarrow{(b', a')}$, то часть этого пути, задевающую вершины из V_2, заменим в G_1 дугой $\overrightarrow{(a, a')}$.

Свойство 2. Каждые два цикла в G_1 пересекаются.

Допустим, что в G_1 есть два непересекающихся цикла C_1 и C_2.

Если $E(C_1) \cup E(C_2) \subset E(G) \cap E(G_1)$, то они должны пересечься, т.к. G — (ξ)-граф. Следовательно, один из этих циклов проходит через вершину a, а другой нет. Пусть, для определённости, $E(C_1) \subset E(G_1) \cap E(G)$, $E(C_2) \setminus E(G) = \{\overrightarrow{(a, a')}\}$, где $a' \in A$. Тогда найдется такая вершина $b' \in V_2$, что $\overrightarrow{(b', a')} \in E(G)$. В G найдется путь P, ведущий из a в b'. Понятно, что $\overrightarrow{(a, b)} \in E(P)$. Тогда в G существует цикл $\tilde{C}_2$, такой что $E(\tilde{C}_2) = (E(C_2) \setminus \{\overrightarrow{(a, a')}\}) \cup E(P) \cup \{\overrightarrow{(b', a')}\}$, не пересекающийся с C_1. Противоречие.

Таким образом, согласно свойствам 1 и 2, граф G_1 суть (ξ)-граф и, по индукционному предположению, (ε)-граф. Т.е. найдется такая вершина $x \in V(G_1)$, что для любой дуги $\overrightarrow{(v_1, v_2)} \in E(G_1)$ в G_1 существует цикл C, проходящий через x и $\overrightarrow{(v_1, v_2)}$. Покажем, что x обладает тем же свойством и в G.

Подслучай 2.1. $(\overrightarrow{v_1, v_2}) \in E(G) \cap E(G_1)$. Если цикл C в G_1, проходящий через x и $(\overrightarrow{v_1, v_2})$, содержит дуги лишь из $E(G) \cap E(G_1)$, то этот цикл нам и нужен. Допустим, что C содержит дугу $(\overrightarrow{a, w}) \in E(G_1) \setminus E(G)$. Так как $w \in A$, то в G найдется путь P, ведущий из b в w, все вершины которого, за исключением w, принадлежат V_2. Тогда цикл C', такой что $E(C') = (E(C) \setminus \{(\overrightarrow{a, w})\}) \cup \{(\overrightarrow{a, b})\} \cup E(P)$, будет искомым для x и $(\overrightarrow{v_1, v_2})$.

Подслучай 2.2. $(\overrightarrow{v_1, v_2}) \in E(G) \setminus E(G_1)$. Так как G сильно связен, то существует цикл C, проходящий через $(\overrightarrow{v_1, v_2})$ и $(\overrightarrow{a, b})$. Обозначим дугу этого цикла, ведущую из V_2 в V_1, через $(\overrightarrow{w, u})$, а отрезок этого цикла, ведущий из a в u, через P. По определению вершины x, в G_1 найдется цикл C_1, проходящий через x и $(\overrightarrow{a, u})$. Тогда цикл C_2, такой что $E(C_2) = (E(C_1) \setminus \{(\overrightarrow{a, u})\}) \cup E(P)$ — искомый цикл для x и $(\overrightarrow{v_1, v_2})$.

Abstract

It is proved that, if each pair of (directed) cycles of a strongly connected directed graph intersects each other (i.e., the cycles have at least one vertex in common), then a vertex x exists such that, for an arbitrary edge $\vec{e}$, there is a cycle in the graph which contains both x and $\vec{e}$

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ СО АН СССР
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ПРОСПЕКТ 4
630090 НОВОСИБИРСК, СССР

Литература

[1] ÁDÁM, A., On some open problems of applied automaton theory and graph theory (suggested by the mathematical modelling of certain neuronal networks), *Acta Cybernet.*, v. 3, 1977, pp. 187—214.

(Поступило 21-ого января 1982 г.)