Зависимости в реляционных структурах данных

Б. Тальхайм

I. Введение

В работе рассматривается одна из перспективных моделей обработки информации для банков данных, предложенная Э. Ф. Коддом (5). В этой модели информация представляется в виде отношений, имеющих форму двумерных таблиц, строки которых представляют собой конкретные записи, а стольбцы определяют некоторые области или же аттрибуты.

Поскольку здесь рассматриваем только зависимости (12), т. е. формулы, являющие независимыми от основного множества и верные в тривиальной структуре, достаточно рассматривать однородные (неструктурированные) отношения.

Пусть G-основное множество. Подмножества R множество G^n называем n-арным отношением. Реляционная структура данных — это структура $\langle G, R\rangle$. В дальнейшем считаем n фиксированным. С любым отношением можно связывать множество $U=\{A_1, \dots, A_n\}$ названий столбцов или как принято говорить в литературе множество аттрибутов.

С любым отношением связывается ограничения. Важными и интересными ограничениями являются разные типы зависимостей между типами записей. Не менее интересно нахождение тех аксиом, с помощью которых можно задать эти зависимости в реляционных базах данных относительно этих вопросов можно посмотреть (1)—(9), (12). В настоящей работе изучается два типа зависимостей, функциональные и декомпозиционные. Изучены общие функциональные зависимости. Для них решена проблема аксиоматизации. Далее изучены бинарные, тернарные и иерархические декомпозиционные зависимости и решена проблема аксиоматизации.

2. Функциональные зависимости

В литературе сначала изучались Э. Ф. Коддом (5) и другими специальные функциональные зависимости, которые в дальнейщем были обобщены Г. Цедли, Я. Деметровичем и Д. Дьепеши (6), (9). Можно еще обобщить эти зависимости и этим упростить математический аппарат.

Для двух элементов $r=(r_1, \ldots, r_n)$, $r'=(r'_1, \ldots, r'_n)$ отношения R пишем

$$\sigma_i(r, r') = \begin{cases} 0, & \text{если } r_i \neq r'_i, \\ I, & \text{если } r_i = r'_i \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\sigma(r, r') = (\sigma_1(r, r'), \ldots, \sigma_n(r, r')).$$

Определение I. Пусть f, g — n-местные Булевы функции. Тогда пара (f, g) называется функциональной зависимостью. Пусть R -отношение и (f, g)-функциональная зависимость. Тогда R удовлетворяет функциональной зависимости $(R \models (f, g))$, если для всех r, r' из R имеет место $f\sigma(r, r') \to g\sigma(r, r') = 1$.

Пусть $\mathfrak{R}$ множество в n-арных отношений, $\mathfrak{f}$ множество функциональных зависимостей, $R \in \mathfrak{R}$, $(f, g) \in \Sigma$.

Тогда определим

$$\mathfrak{K}((f, g)) = \{R' | R'(f, g)\},$$

$$\mathfrak{K}(\Sigma) = \bigcap_{(f, g) \in \Sigma} \mathfrak{K}((f, g)),$$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{f}(R) = \{(f', g') | R \models (f', g')\},$$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{f}(\mathfrak{R}) = \bigcap_{R \in \mathfrak{R}} \mathfrak{R}\mathfrak{f}(R).$$

Мы пишем $\Sigma \models (f', g')$, если $\mathfrak{K}(\Sigma) \subseteq \mathfrak{K}((f', g'))$. Далее для подмножества $\mathfrak{f}'$ множества $\mathfrak{f}$ всех функциональных зависимостей пишем

$$\mathrm{Cn}_{\mathfrak{f}'}(\Sigma) = \{(f', g') \in \mathfrak{f}' | \Sigma \models (f, g)\}.$$

Для классов Поста (14) K_1, K_2 пусть $\mathfrak{f}(K_1, K_2) = K_1 \times K_2$. Очевидно все известные функциональные зависимости ((1), (5), (6), (9)) являются специальными случаями функциональных зависимостей. Обозначим (14) P_1 класс всех n-местных коньюнкций, S_1 класс всех n-местных дизьюнкции и A_1 класс всех n-местных монотонных функции. Тогда

Кодд-функциональные зависимости (5), (1):	$\mathfrak{f}(P_1, P_1)$,
дуальные зависимости (6), (9):	$\mathfrak{f}(S_1, S_2)$,
строгие зависимости (6), (9):	$\mathfrak{f}(S_1, P_1)$,
слабые зависимости (6), (9):	$\mathfrak{f}(P_1, S_1)$,
монотонные зависимости:	$\mathfrak{f}(A_1, A_2)$.

Пример. Расписание уроков ($U = \{$лектор, лекция, группа, место, время$\}$).

Ограничения:

1) Каждая группа посещает для любого момента времени не более одной лекции.

2) Любой лектор читает в любом моменте времени не более одной лекции.

3) Любое место не может быть занято два раза.

4) Если лекция читается разными лекторами, тогда и слушатели разные.

Эти ограничения можно и легко формулировать нашим аппаратом. Отношение.

лектор	лекция	группа	место	время
1	1	1	1	1
1	2	2	1	2
2	3	1	2	2
2	1	2	2	4
2	4	1	1	3
2	5	1	1	4
3	6	1	1	5
3	3	2	2	1
3	2	2	2	3
4	7	3	1	6
5	8	1	1	7
5	8	2	1	8
6	9	1	2	8
6	9	2	2	7

Эти специальные функциональные зависимости легко представить на языке $\{X \to Y | X, Y \subseteq U\}$. Для Кодд-функциональных зависимостей легко доказывается с помощью фольклорной теоремы Фреге полнота следующей системы (1) правил вывода:

(*c*𝔣-рефлексивность) $\dfrac{}{X \cup Y \to Y}$

(*c*𝔣-монотония) $\dfrac{X \to Y}{X \cup W \cup Z \to Y \cup Z}$

(*c*𝔣-транзитивность) $\dfrac{X \to Y,\ Y \to Z}{X \to Z}$

(*c*𝔣-объединение) $\dfrac{X \to Y,\ X \to Z}{X \to Y \cup Z}$

(*c*𝔣-декомпозиция) $\dfrac{X \to Y \cup Z}{X \to Y}$

Аналогичные системы правил вывода для специальных функциональных зависимостей были представлены в (6).

Для n-местных Булевих функций f, g пишем $f \leqq g$, если для всех $\tilde{\sigma}$ из E_2^n из $f(\tilde{\sigma})=1$ следует, что $g(\tilde{\sigma})=1$.

Теорема I. Для n-местных Булевых функций $f, f_1, \ldots, f_m, g, g_1, \ldots, g_m$ имеет место $\{(f_i, g_i) | 1 \leqq i \leqq m\} \models (f, g)$ тогда и только тогда, когда имеет место $\underset{i=1}{\overset{m}{\&}} (f_i \to g_i) \leqq f \to g$.

Доказательство. 1) Докажем утверждение теоремы сначала для $m=1$.

1.1) Пусть $f_1 \to g_1 \not\models f \to g$, т. е. существует набор $\tilde{\sigma}$ со свойством $f(\tilde{\sigma}) = f_1(\tilde{\sigma}) = g_1(\tilde{\sigma}) = 1$ и $g(\tilde{\sigma}) = 0$ или $f_1(\tilde{\sigma}) = g(\tilde{\sigma}) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Тогда существует отношение R в $\mathfrak{R}((f_1, g_2))$ такая, что $R \notin \mathfrak{R}((f, g))$.

1.2) Допустим, что в $\mathfrak{R}(f_1, g_1) \setminus \mathfrak{R}((f, g))$ существует отношение R. Тогда существуют в R элементы r, r' такие, что $f\sigma(r, r') \to g\sigma(r, r') = 0$ и $f_1\sigma(r, r') \to g_1\sigma(r, r') = 1$.

2) Доказательство утверждения теоремы для $m = 2$ аналогично.

Из этой теоремы и теорем представления монотонных функций (14) вытекает следующее утверждение, подчеркивающее важность класса слабых зависимостей.

Следствие 1. Для любой зависимости (f, g) из $\mathfrak{f}(A_1, A_1)$ существует эквивалентная ей система Σ слабых зависимостей. Тем самым, поскольку аксиоматизация класса $\mathfrak{f}(A_1, A_1)$ намного сложнее аксиоматизации класса $\mathfrak{f}(P_1, S_1)$, вместо систем монотонных зависимостей удобнее рассматривать системы слабых зависимостей.

Следствие 2. Пусть f, f', g, g' n-местные функции.

1) $\models (f, 1)$, $\models (0, g)$.

2) Если имеют места $f' \leqq f$, $g' \geqq g$, то $(f, g) \models (f', g')$.

3) Если $f \leqq g$, то $\models (f, g)$.

4) $(f, g) \models (\bar{g}, \bar{f})$.

5) Пусть h m-местная монотонная функция и $\Sigma = \{(f_i, g_i) | I \leqq i \leqq m\}$. Тогда имеет место

$$\Sigma = \big(h(f_1, f_2, \dots, f_m),\ h(g_1, g_2, \dots, g_m)\big).$$

Очевидно, что теорема I обусловливает простые аксиоматизации класса $\mathfrak{f}(K_1, K_2)$. Приведем два из них. Подмножество Σ множества $\mathfrak{f}(K_1, K_2)$ называется замкнутым, если верно

$$\Sigma = Cn_{\mathfrak{f}(K_I, K_2)}(\Sigma).$$

Следствие 3 (9). Подмножество Σ множества $\mathfrak{f}(P_1, S_2)$ является замкнутым тогда и только тогда, когда для лубой зависимости (f, g) из $\mathfrak{f}(P_1, S_1) \setminus \Sigma$ существует функция h из P_5 такая, что верны следующие условия:

1) $f \vee h = f$, $g \& h \neq h$,

2) если для $(f', g') \in \Sigma$ верно $f' \vee h = f$, то $g' \& h = h$.

Следствие 4. Подмножество Σ множества $\mathfrak{f}(A_1, A_1)$ является замкнутым множеством тогда и только тогда, когда для всех зависимостей (f, g) из $\mathfrak{f}(A_1, A_1) \setminus \Sigma$ существует функция h в P_5 такая, что имеет место:

1) $f \vee h = f$, $g \vee h \neq g$,

2) если $(f', g') \in \Sigma$ и $f' \vee h = f'$, то $g' \vee h = g'$.

В множестве $\mathfrak{f}$ можно ввести частичный порядок. Мы пишем $(f_1, g_1) \geqq (f_2, g_2)$, если $f_1 \geqq f_2$ и $g_1 \geqq g_2$. Любое замкнутое множество Σ имеет тогда некоторое подмножество максимальных элементов.

$$\max(f) = \mathop{\&}_{(f, g) \in \Sigma} g; \quad \min(g) = \bigvee_{(f, g) \in \Sigma} f;$$

$$\mathrm{Max}(\Sigma) = \{(f, g) \in \Sigma | g = \max(f),\ f = \min(g)\}.$$

Теорема 2. Пусть M замкнутое множество функциональных зависимостей. Зависимость (f, g) является элементом M тогда и только тогда, когда существует в $\mathrm{Max}(M)$ элемент (f', g') такой, что имеет место соотношения $f' \geqq f$, $g' \leqq g$.

Доказательство. Допустим, что (f, g) является элементом множества M. Пусть $f' = \min(g)$ и $g' = \max(\min(g))$. Поскольку $(\min(g), g) \in M$, $f \leqq \min(g)$ по следствию 2 имеют место $f' \geqq f$, $\max(\min(g)) \leqq g$ и таким образом $g' \leqq g$. Функция min является монотонной и поэтому верно $\min(\max(\min(g))) \leqq \leqq \min(g)$. С другой стороны, $(\min(g), \max(\min(g))) \in M$ и $\min(g) \leqq \leqq \min(\max(\min(g)))$, т. е. $\min(g) = \min(\max(\min(g)))$ (f', g') из $\mathrm{Max}(M)$. Если $(f', g') \in \mathrm{Max}(M)$ по следствию 2 имеем $(f, g) \in M$.

Следствие 5. Для всех замкнутых множеств Σ $\langle \mathrm{Max}(\Sigma), \cup, \cap \rangle$ является дистрибутивной структурой, где

$$(f_1, g_1) \cup (f_2, g_2) = (\min(g_1 \vee g_2),\ g_1 \vee g_2) \text{ и}$$

$$(f_1, g_1) \cap (f_2, g_2) = (f_1 \& f_2, \max(f_1 \& f_2)).$$

Армстронг изучал подобные структуры $\{(f, g) \in P_1 \times P_1 | g = \max(f)\}$ (1), (2). Из следствия 5 и теоремы 2 следует тогда очень важное свойство элементов множества $\mathrm{Max}(M)$.

Следствие 6. Любой элемент множества $\mathrm{Max}(M)$ имеет единственное несократимое представление в виде объединения неразложимых элементов.

Интересно также максимальное число неразложимых элементов структуры $\mathrm{Max}(M)$: 2^n.

Этими утверждениями легко выводить и решения алгоритмических проблем и оценки сложности решения алгоритмических проблем для функциональных зависимостей.

3. Декомпозиционные зависимости

Для определения этих зависимостей введем две операции над отношениями.

Определение 2. 1) Пусть $X = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\} \subseteqq U$. Тогда называется

$$R[X] = \{(r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) | r' \in R\colon\ r_{i_j} = r'_{i_j}\}$$

проэкцией отношения R на (стольбцы из) X.

2) Пусть для $X = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$, $Y = \{A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\}$ $X \cup Y = U$ две проекции отношения R. Тогда сверткой отношений $R[X]$ и $R[Y]$ называется множество

$$R[X] * R[Y] = \{(r_1, \ldots, r_n) | (r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) \in R[X],\ (r_{j_1}, \ldots, r_{j_l}) \in R[Y]\}.$$

Определение 3. 1) Покрытие $(X_1, \ldots, X_k)$ множества U называется k-арной декомпозиционной зависимостью.

2) Отношение R удовлетворяет k-арной декомпозиционной зависимости $(X_1, \ldots, X_k)$ $(R \models (X_1, \ldots, X_k))$, если имеет место равенство $R = R[X_1] * R[X_2] * \ldots \ldots * R[X_k]$.

Пусть ϑ_k-множество всех k-арных декомпозиционных зависимостей и ϑ-множество всех декомпозиционных зависимостей.

Как и для функциональных зависимостей можно определить для D, $D \subseteq \vartheta$, $\tilde{X}$, $\tilde{X} \in \vartheta$, R, $\mathfrak{R}$ множества $\mathfrak{K}(\tilde{X})$, $\mathfrak{K}(D)$, $\mathfrak{N}\vartheta(R)$, $\mathfrak{N}\vartheta(\mathfrak{R})$, $Cn_\vartheta(D)$, $Cn_{\vartheta_k}(D)$ и соотношение $D \models \tilde{X}'$.

Удобно и легко формулировать эти зависимости на языке $\mathfrak{L}$ открытой логики предикатов с алфавитом $\{\{(x_1, \ldots, x_n) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n\}, P, \&, \to, (,)$, где $V_i \cap V_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и P n-местный символ.

Определение 4. Формула языка $\mathfrak{L}$ вида

$$P(\tilde{x}_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} P(\tilde{x}_k) \to P(\tilde{x})$$

называется предикативной зависимостью и называется декомпозиционной зависимостью, если выполнены следующие условия для всех i, j, $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$:

1) $$|\tilde{x}_i| \cap |\tilde{x}| \nsubseteq |\tilde{x}_j| \cap |\tilde{x}|$$

2) $$(|\tilde{x}_j| \setminus |\tilde{x}|) \cap (|\tilde{x}_i| \setminus |\tilde{x}|) = \emptyset,$$

где $|(y_1, \ldots, y_n)|$ множество $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Оба эти условия для декомпозиционных зависимостей существенные. Множества всех предикативных и всех декомпозиционных зависимостей отличаются существенным образом. Например, существуют в $\mathfrak{L}_\Pi$ бесконечные цепы формул $\langle \alpha_i \rangle$, $\langle \beta_i \rangle$ такие, что имеют место $\mathfrak{K}(\alpha_i) \subsetneq \mathfrak{K}(\alpha_{i+1})$ и $\mathfrak{K}(\beta_i) \supsetneq \mathfrak{K}(\beta_{i+1})$ для всех натуральных чисел i. В множестве всех декомпозиционных зависимостей $\mathfrak{L}_Д$ существуют только такие цепы конечной длины и точно один максимальный элемент. Вместе с тем можно и доказать, что для любого подмножества Σ множества $\mathfrak{L}_Д$ существует в $\mathfrak{L}_\Pi$ формула α, эквивалентная этому множеству Σ (т. е. $\mathfrak{K}(\Sigma) = \mathfrak{K}(\alpha)$).

Пусть далее $\mathfrak{L}_Д^k$-множество всех k-компонентных формул из $\mathfrak{L}_Д$.

Следует отметить, что для предикативных зависимостей существует очень простая аксиоматизация, известная как аксиоматизация Фреге—Лукасевича и вновь открытая разными авторами.

Предложение. Формула α из $\mathfrak{L}$ следует из подмножества Σ множества $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда она выводима с помощью правил отделения и подстановки из множества и множества аксиом

$$\{\alpha \to \beta \to \alpha,\ \alpha \& \beta \to \alpha,\ \alpha \& \beta \to \beta,\ \alpha \to \beta \to \alpha \& \beta\},$$

$$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma).$$

Можно и в множестве ϑ ввести порядок. Для $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ и $\tilde{Y} = (Y_1, \ldots, Y_l)$ из ϑ пишем $\tilde{X} \leq \tilde{Y}$, если для всех i, $I \leq i \leq k$, существует j, $I \leq j \leq l$, такое, что $X_i \subseteq Y_j$.

Следствие 7. Для $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ из ϑ следует из $\tilde{X} \leq \tilde{Y}$ что $\tilde{X} \models \tilde{Y}$. Изучим сейчас класс ϑ_2 всех бинарных декомпозиционных зависимостей.

Определение 5. 1) Система D, $D \subseteq \vartheta_2$, называется монотонна, если $(U, U) \in D$ и из $\tilde{X} \in D$, $\tilde{X} \leq \tilde{Y}$ следует $\tilde{Y} \in D$.

2) Пусть D-монотонная система. Если для всех (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) из D из того, что

а) $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2$ следует $(X_1 \cap Y_1, X_2 \cup Y_2) \in D$, то D называется слабо полной;

б) $Y_1 \cap Y_2 = X_2$ следует $(X_1 \cap Y_1, Y_2) \in D$, то D называется АД-полной (2);

в) $X_1 \cap X_2 \subseteq Y_1$ и $X_2 \subseteq Y_2$ следует $(X_1 \cap Y_1, Y_2) \in D$, то D называется полной;

г) $X_2 \subseteq Y_2$ следует $(Y_1 \cap (X_1 \cup Y_2), Y_2) \in D$, то D называется сильно транзитивной;

д) $X_1 \cap X_2 \subseteq Y_2$ и $Y_2 \subseteq (X_1 \cap X_2) \cup Y_1$ следует $(Y_1 \cap (X_1 \cup Y_2), Y_2) \in D$, то D называется транзитивной (3).

3) Монотонная система $D, D \subseteq \vartheta_2$, называется сильно полной, если для всех $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2)$ из D также и принадлежит D $(Y_1 \cap (X_2 \cup Y_1 \cup Z_1) \cup \cup Y_1 \cap (Y_2 \cup Z_2), X_2 \cap (X_1 \cup Y_2 \cup Z_1) \cup Y_2 \cap (Y_1 \cup Z_2))$.

Следствие 8. Сильно полная система D, $D \subseteq \vartheta_2$, является полной. Полная система D, $D \subseteq \vartheta_2$, является слабо полной и АД-полной системой.

Первое утверждеиие очевидно для $(Y_1, Y_2) = (\emptyset, U)$. Можно доказать, что полная система D, $D \subseteq \vartheta_2$, также сильно полна (Лемма 7) и что существует слабо полная система D, $D \subseteq \vartheta_2$, не являющаясь полной.

Определение 6. Система D, $D \subseteq \vartheta$, называется k-замкнутой, если $D = Cn_{\vartheta_k}(D)$.

Определение 7. Система D, $D \subseteq \vartheta_2$, удовлетворяет D_2-аксиоме, если для всех $(Z_1, Z_2) \in \vartheta_2 \setminus D$ существует множество $B \subseteq U$ такое, что

1) $Z_1 \cap Z_2 \subseteq B$, $Z_1 \nsubseteq B$, $Z_2 \nsubseteq B$;

2) если $(X_1, X_2) \in D$, $X_1 \cap X_2 \subseteq B$, то $X_1 \subseteq B$ или $X_2 \subseteq B$.

Определение 8. Пусть $\underline{E} = \{E_1, \ldots, E_k\}$-множество множеств. $\underline{E}$ называется Δ-системой, если для всех $i, j, I \leqq i < j \leqq k$, множество $E_i \cap E_j$ не зависит от выбора i и j.

Определение 9. Множество D, $D \subseteq \vartheta_2$, удовлетворяет D_2'-аксиоме, если существуют натуральное число k и система $\underline{E} = \{E_{ij} \subseteq U | I \leqq i < j \leqq k, |E_{ij}| \leqq \leqq n-2\}$, что

1) если $(X, Y) \notin D$, то существуют i, j $(I \leqq i < j \leqq k)$, что $X \cap Y \subseteq E_{ij}$, $X \nsubseteq E_{ij}$, $Y \nsubseteq E_{ij}$;

2) если $(X, Y) \in D$ и $X \cap Y \subseteq E_{ij}$ для некоторых i, j, то $X \subseteq E_{ij}$ или $Y \subseteq E_{ij}$;

3) для всех i, j, l $(I \leqq i < j < l \leqq k)$ $\{E_{ij}, E_{il}, E_{jl}\}$ является Δ-системой.

Теорема 3. Для системы D, $D \subseteq \vartheta_2$, следующие утверждения эквивалентны:

(а) D 2-замкнута;

(б) D сильно полна;

(в) D полна;

(г) D АД-полна;

(д) D транзитивна;

(е) D сильно транзитивна;

(ё) D удовлетворяет D_2-аксиоме;

(ж) удовлетворяет D_2'-аксиоме.

Соотношение (а)$\Rightarrow$(г) доказано в (2). Там же по определению считали эквивалентными (а) и (г). Как и в (2) доказывается (а)$\Rightarrow$(б). Если (а) и (в) эквивалентны, то по следствию 8 (б) и (в) эквивалентны. По лемме 7 из (в) следует (б). Аналогично можно доказать, что (д), (е) и (в) эквивалентны. Докажем аналогичным способом как и в (9), что (а)$\Rightarrow$(в) (лемма 1), (в)$\Rightarrow$(ё) (лемма 2), (ё)$\Rightarrow$(ж) (лемма 3) и (ж)$\Rightarrow$(а) (лемма 4, 5, 6).

Лемма I. Если D 2-замкнутое множество, то D полна.

Лемма I$^+$. Если $\Sigma = Cn^2(\Sigma)$ для некоторого подмножества Σ множества $\mathfrak{L}^2_Д$, то имеет место для всех $P(\tilde{X}_1)\&P(\tilde{X}_2)\to P(\tilde{X}_3)$ и $P(\tilde{Y}_1)\&P(\tilde{Y}_2)\to P(\tilde{Y}_3)$ из Σ:

1) Если $|\tilde{Z}_{i_1}|\supseteq|\tilde{X}_1|$ и $|\tilde{Z}_{i_2}|\supseteq|\tilde{X}_2|$, то $P(\tilde{Z}_1)\&P(\tilde{Z}_2)\to P(\tilde{Z}_3)\in\Sigma$.

2) Если $|\tilde{X}_1|\cap|\tilde{X}_2|\subseteq|\tilde{Y}_1|$ и $(|\tilde{Y}_1|\setminus|\tilde{Y}_2|)\cap(|\tilde{X}_1|\setminus|\tilde{X}_1|)=\emptyset$, то для $\tilde{Z}$ со свойством $\tilde{Z}\supseteq|\tilde{X}_1|\cap|\tilde{Y}_1|$, $|\tilde{Z}|\setminus(|\tilde{X}_1|\cap|\tilde{Y}_1|)\cap|\tilde{Z}_2|=\emptyset$ имеет место $P(\tilde{Z})\&P(\tilde{Y}_2)\to P(\tilde{Y}_3)$.

Доказательство леммы I$^+$. Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) следует из истинности формулы $((\alpha_1\&\alpha_2\to\alpha_3)\&(\alpha_3\&\alpha_2\to\alpha_4))\to(\alpha_1\&\alpha_2\to\alpha_4)$. Очевидно, $P(\tilde{Z})\&P(\tilde{Y}_2)\to P(\tilde{Y}_3)$ из $\mathfrak{L}^2_Д$.

Лемма 2. Если множество D полное множество, то D удовлетворяет D_2-аксиоме.

Доказательство. Пусть D полное множество. Допустим, что $(X\cup V,\ V\cup Y)\notin D$ для разбиения $\{X, Y, V\}$ множества U. Тогда существует множество $E, E\subseteq U$, что $V\subseteq E$ и E максимально относительно (X, Y), т. е. $(X\cup E,\ Y\cup E)\notin D$ и для всех $E', E'\supsetneq E$: $(X\cup E',\ Y\cup E')\in D$. Существование такого множества следует из свойства $(U, X)\in D$.

Докажем, что множество E удовлетворяет D_2-аксиоме. Во-первых $V\subseteq E$. Есло было бы $X\subseteq E$, то $(E, E\cup Y)\notin D$, т. е. $(E\cup Y)\notin D$, т. е. $(U)\notin D$. Поэтому $X\nsubseteq E$ и $Y\nsubseteq E$. Во-вторых, пусть для $(V'\cup X',\ V'\cup Y')\in D$ $V'\subseteq E$. Допустим, что $X'\nsubseteq E$ и $Y'\nsubseteq E$. Тогда для $X''=X'\setminus E$, $Y''=Y'\setminus E$ $(E\cup X'',\ E\cup Y'')\in D$. Поэтому из D также $(E\cup X\cup X'',\ E\cup Y\cup X'')$ и $(E\cup X\cup Y'',\ E\cup Y\cup Y'')$. Из $(E\cup X'', E\cup Y'')$ $(E\cup X\cup Y'',\ E\cup Y\cup Y'')\in D$ следует, что $(E\cup X,\ E\cup Y\cup Y'')$, $(E\cup X\cup X'',\ E\cup Y\cup Y'')\in D$. Из $(E\cup Y'',\ E\cup X'')$, $(E\cup X\cup X'',\ E\cup Y\cup X'')\in D$ следует, что $(E\cup(X\cap Y''), E\cup Y\cup X''\in D)$. Из $(E\cup Y\cup X'',\ E\cup(X\cap Y''))$, $(E\cup Y\cup Y'',\ E\cup X)\in D$ следует, что $(E\cup Y, E\cup X)\in D$. Это противоречит $(E\cup X,\ E\cup Y)\notin D$. Поэтому D удовлетворяет D_2-аксиоме.

Лемма 3. Если D удовлетворяет D_2-аксиоме, то D удовлетворяет D_2'-аксоме.

Доказательство. Для всех $(X, Y)\notin D$ напишем начиная с $i=2$ равенственные множества $E(X, Y)=X\cap Y=E_i$: $E_2, E_3, \ldots, E_k$. Пусть $E_{1j}=E_j$ $(I<j\leqq k)$ и $E_{ij}=E_i\cap E_j$ $(I<i<j\leqq k)$. Условия 1 и 2 уже выполнены множеством $\{E_2, \ldots$' $\ldots, E_k\}$. Докажем условие 3.

Пусть $i=I$. Тогда $E_{1j}=E_j$, $E_{1l}=E_l$, $E_{jl}=E_j\cap E_l$ и $\{E_{1j}, E_{1l}, E_{jl}\}$ является Δ-системой.

Пусть $i>I$. Тогда $E_{ij}=E_i\cap E_j$, $E_{jl}=E_j\cap E_l$, $E_{il}=E_i\cap E_l$. Поэтому $\{E_{ij}, E_{jl}, E_{il}\}$ Δ-система.

Лемма 4. Пусть R отношение и r_1, r_2, r_3 разные элементы R. Тогда $\{E(r_1, r_2), E(r_1, r_2), E(r_2, r_3)\}$ Δ-система, где

$$E(r, r') = \{A \in U | r(A) = r'(A)\}.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5. Пусть для всех i, j, l $(I \leqq i < j < l \leqq k)\{E_{ij}, E_{il}, E_{jl}\}$ является Δ-системой и $\underline{E} = \{E_{ij} \subseteqq U | I \leqq i < j \leqq k, |E_{ij}| \leqq n-2\}$. Тогда существует отношение R такое, что

$$\underline{E}(R) = \{E(r, r') | r, r' \in R \ r \neq r'\} = \underline{E}.$$

Доказательство (по индукции). Пусть для $m(<k)$ уже получены $r_1, \ldots, r_m$ со свойством: $(I \leqq i < j \leqq m)$ $E(r_i, r_j) = E_{ij}$. r_{m+1} определим следующим образом:

$$r_{m+1}(A) = \begin{cases} r_i(A), & \text{если } A \in E_{im+1} \quad I \leqq i \leqq m, \\ \max(r_i(B) | B \in U, \ I \leqq i \leqq m) + I & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что $\{r_1, \ldots, r_{m+1}\}$ удовлетворяет условию леммы.

1) Если $A \in E_{im+1} \cap E_{jm+1}$, то $r_i(A) = r_j(A)$ и $\{E_{ij}, E_{im+1}, E_{jm+1}\}$ Δ-система.

2) Если для i, $I \leqq i \leqq m$, $A \notin E_{im+1}$, то $r_i(A) \neq r_{m+1}(A)$. Действительно, если для j $A \in E_{jm+1}$, то $r_{m+1}(A) = r_j(A)$ и $A \notin E_{ij}$. Поскольку $\{E_{ij}, E_{jm+1}, E_{im+1}\}$ Δ-система и $r_i(A) \neq r_j(A)$, $r_i(A) \neq r_{m+1}(A)$. Если $A \notin \bigcup\limits_{1 \leqq j \leqq m} E_{jm+1}$, то $r_{m+1}(A) \neq$ $\neq r_i(A)$ для всех i, $I \leqq i \leqq m$.

Поэтому существует $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ со свойством $\underline{E}(R) = \underline{E}$.

Лемма 6. Пусть D подмножество множества ϑ_2.

1) Если D удовлетворя D_2-аксиоме, то существует отношение R такое, что $\mathfrak{N}\vartheta_2(R) = D$.

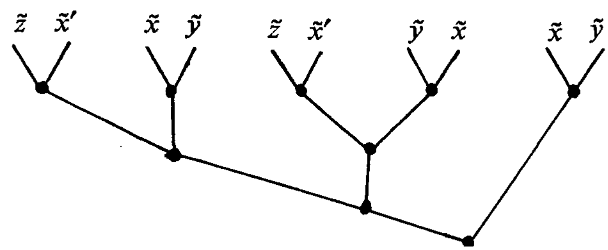
2) Если R отношение, то $\mathfrak{N}\vartheta_2(R)$ удовлетворяет D_2-аксиоме.

Доказательство. 1 Пусть D с $\underline{E} = \{E_{ij} | I \leqq i < j \leqq k\}$ удовлетворяет D_2-аксиоме. Тогда по лемме 5 существует отношение R такое, что $\underline{E}(R) = \underline{E}$ и по аксиоме $D = \mathfrak{N}\vartheta_2(R)$.

2) Пусть R отношение, $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ и $E_{ij} = \underline{E}(r_i, r_j)$. Множество $\{E_{ij} | I \leqq i < j \leqq k\}$ удовлетворяет аксиоме.

Лемма 7. Если D полная система, то D сильно полна.

Доказательство. Пусть $\tilde{X} = (X_1, X_2)$, $\tilde{Y} = (Y_1, Y_2)$, $\tilde{Z} = (Z_1, Z_2)$ из D. Тогда выберем минимальное $\tilde{X}' = (X_1', X_2')$ со свойством $\tilde{X} \geqq \tilde{X}$, $Z_1 \cap Z_2 \subseteqq X_2'$, $Z_2 \subseteqq X_1'$. Используя правило $\dfrac{(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)}{(X_1 \cap (X_2 \cup Y_1), X_2 \cup Y_2)}$, которая следует из павила полноть следующее дерево вывода даст решение:



Аналогичным путем можно решать и проблему аксиоматизации для класса ϑ_k. Можно, например, доказать, что если система D 3-замкнута, то эта система монотонна и для (X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3) из D также и $(X_1 \cap Y_1, Y_2, Y_3)$ из D, если одно из следующих свойств верна:

1) $(X_i \cap X_j) \subseteq (Y_i \cap Y_j)$, $(X_k \setminus X_1) \cap (Y_1 \setminus Y_k) = \emptyset$ для всех i, j, k $(I \leqq i < j \leqq 3$, $2 \leqq k \leqq 3)$;

2) $Y_1 \setminus Y_2 \subseteq X_1$, $X_1 \cap X_i \subseteq Y_1 \cap Y_2$ для i $(2 \leqq i \leqq 3)$;

3) $(X_2 \cap Y_1) \cup (Y_1 \setminus Y_2) \subseteq X_1$, $X_i \cap X_3 \subseteq Y_1 \cap Y_2$ для i $(I \leqq i \leqq 2)$.

Определение 10. Зависимость $(X_1, \ldots, X_k)$ из ϑ называется иерархической (8), если $\{X_1, \ldots, X_k\}$ Δ-система.

Пусть $\mathfrak{H}$ множество всех иерархических зависимостей. Множество H иерархических зависимостей называется $\mathfrak{H}$-замкнутой, если $H = Cn_{\mathfrak{H}}(H)$.

Определежние 11. Система H, $H \subseteq \mathfrak{H}$, удовлетворяет H-аксиоме, если для всех $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{H} \setminus H$ существует такое подмножество B, $B \subseteq U$, что

1) $X_i \cap X_j \subseteq B$ для некоторых i, j и дляа всех i $(I \leqq i \leqq k)$ $X_i \nsubseteq B$;

2) если $\tilde{Y} = (Y_1, \ldots, Y_l) \in H$ и $Y_l \cap Y_j \subseteq B$ для некоторых i, j, то $Y_1 \subseteq B$ или $Y_2 \subseteq B$ или ... или $Y_k \subseteq B$.

Совершенно аналогично теореме 3 доказывается следующее утверждение, доказательство которого мы поэтому отпустим.

Теорема 4. Система H, $H \subseteq \mathfrak{H}$, является $\mathfrak{H}$-замкнутой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет H-аксиоме.

Summary

General functional dependencies with a simple solution of completeness problem are discussed. Also the completeness problem in the class of binary decomposition dependencies and in the class of hierarchical decomposition dependencies is solved.

B. THALHEIM
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
SEKTION MATHEMATIK
GDR 8027 DRESDEN
MOMMSENSTR. 13

Литература

[1] Armstrong, W. W., Dependency Structures of Data Base Relationships. Proc. IFIP 74, North Holland, 1974, 580—583.

[2] Armstrong, W. W., Delobel, C., Decompositions and Functional Dependencies in Relations. ACM TODS, 5, 4, 1980, 404—430.

[3] Beeri, C., Fagin, R., Howard, J. H., A complete axiomatization for functional and multivalued dependencies in database relations. Proc. 1977 ACM SIGMOD, Toronto, 1977, 47—61.

[4] Beeri, C., Vardi M. Y., On the properties of join dependencies. Advances in Database Theory, Vol. 1, Plenum Press, London, 1982.

[5] Codd, E. F., A Relational Model for Large Shared Data Bases. CACM, 13, 6, 1970, 377—387.

[6] Czedli, G., On Dependencies in the Relational Model of Data. EIK, 17, 1981, 2/3, 103—112.

[7] Date, C. J., An Introduction to Database Systems. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

[8] Delobel, C., An overview of the relational data theory. Proc. IFIP 1980, North Holland, 1981, 413—426.

[9] Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.: On the functional dependency and some generalizations of it. Acta Cybernetica, Tom 5, Fasc. 3, 1981, 295—305.
[10] Erdős P., Rado R., Intersection theorems for systems of sets. Journal London Math. Soc. 35 (1960), 85—90; 44 (1969), 467—479.
[11] Kambayashi, Y., Database — a bibliography, Vol. 1. Springer-Verlag, 1981.
[12] Makowsky, J. A., Characterizing Data Base Dependencies, LNCS 115, 1981, 86—97.
[13] Ващенко В. П.: Теоретико-множественный подход к функциональной разделимости. Дискретный анализ 10, 1967, 9—22.
[14] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.: Функции алгебры логики и классы Поста. Наука, Москва, 1966.

(Received Febr. 16, 1984)