О строении клона бурле на трехэлементном множестве*

Я. Деметрович, И. А. Мальцев

MTA SZTAKI
BUDAPEST
VICTOR HUGO U. 18—22.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НОВОСИБИРСК

Введение

Пусть A — конечное множество и f—n-арная функция, определенная на A, значения которой также принадлежат A. Функция f удовлетворяет термальному условию, если для любого i, $1 \leqq i \leqq n$, и для любых $x, y, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n$ из A из

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \ldots, b_n)$$

следует

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_{i-1}, y, b_{i+1}, \ldots, b_n).$$

Функции, удовлетворяющие термальному условию, будем называть ТУ-функциями.

Термальное условие впервые было введено независимо Маккензи и Лэмпе [8]. Оно является прямым обобщением некоторых очевидных свойств одноместных функций и свойств линейных операций в векторных пространствах. Различные примеры использования термального условия при построении решеток с заданными свойствами содержит статья Тэйлора [12].

Обозначим через O_A множество всех функций $f\colon A^n \to A$, зависящих от конечного числа переменных. Предитеративной алгеброй Поста на множестве A называется алгебра $\mathscr{F}_A^* = \langle O_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$ типа $(1, 1, 1, 2)$ со следующим об-

* Работа поддерживалась Национальными Научноисследовательским Фондом № 1066.

разом определенными операциями:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

$$(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{n+m-1}).$$

Если f — унарная функция, то $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$. (А. И. Мальцев [9]). Клоном называется подалгебра алгебры $\mathscr{F}_A^*$, содержащая все проекции $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Клон, состоящий из ТУ-функций, называется ТУ-клоном. Каждый ТУ-клон на множестве A содержится в некотором максимальном ТУ-клоне [3]. При $2 < |A| < \omega$ по крайней мере один ТУ-клон (клон Бурле) имеет счетное число подклонов [11]. На двухэлементном множестве существует только один максимальный ТУ-клон, содержащий 11 подклонов. На трехэлементном множестве иммется два максимальных ТУ-клона: клон Бурле и клон линейных функций (их точные определения приведены в следующем параграфе). Клон линейных функций содержит 22 подклона (см. рисунок 1), клон Бурле имеет счетное число подклонов. Строение нижней части решетки его подклонов изучено Я. Деметровичем и И. А. Мальцевым [5, 6]. Найдены все подклоны клона Бурле, состоящие из функций, принимающих не более двух фуксированных значений. Решетка этих подклонов изображена на рис. 2. Этот рисунок показывает, что решетка подклонов клона Бурле значительно сложнее известной решетки Поста всех подалгебр предитеративной алгебры $\mathscr{F}_A^*$, $|A| = 2$.

Цель данной статьи — продолжить описание строения решетки подклонов клона Бурле на трехэлементном множестве. По-видимому, эта решетка является наиболее сложным (по строению, а не по мощности) из известных фрагментов решетки подалгебр алгебры $\mathscr{F}_A^*$, $|A| = 3$.

На четырехэлементном множестве имеется уже 25 максимальных ТУ-клонов [3]. Один из них — клон Бурле, имеет счетное число подклонов. Есть ли среди остальных ТУ-клоны с бесконечным числом подклонов, авторам не известно.

1. Подклоны клона Z_0

Говорят, что определенная на A функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от i-той переменной, если существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, $b, c \in A$, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

В этом случае i-тая переменная называется существенной. Переменные, не являющиеся существенными, называются фиктивными. Функция f называется существенно одноместной, если у нее имеется только одна существенная переменная, в противном случае f называется существенно многоместной.

В дальнейшем мы везде полагаем $A=\{0,1,2\}$. Как уже сказано, на A существуют два максимальных ТУ-клона: L и B. Клон L состоит из линейных функций, то есть функций, представимых в виде

$$a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,$$

где сложение и умножение производятся по модулю 3. Решетка подклонов клона L (см. рисунок 1) конечная и была описана в работах Бадьинского и Деметровича [1, 2]. Подробное описание ее элементов можно найти также в [5].

Другой максимальный ТУ-клон, B, состоит из существенно одноместных функций и функций, представимых в виде

$$f_0(f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n)), \tag{1.1}$$

где f_0: $\{0,1\}\to A$, $f_1,\ldots,f_n$: $A\to\{0,1\}$ и сложение производится по модулю 2. Этот клон впервые упомянут в работе Бурле [4]. В [6] *Я.* Деметровичем и *И. А.* Мальцевым описаны все подклоны клона B, состоящие из функций вида (1.1), у которых f_0 может принимать только значения 0 и 1. Образуемая этими подклонами решетка изображена на рисунке 2. Поскольку эта решетка играет важную роль в наших дальнейших построениях, приводим также рисунки 3 и 4, позволяющие лучше уяснить взаимное расположение подклонов и их обозначения.

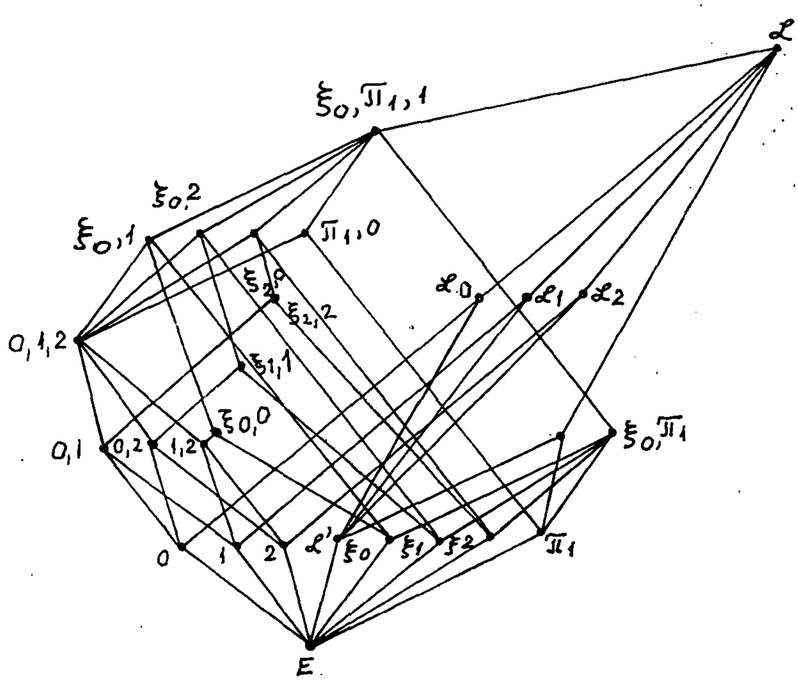


Рис. 1

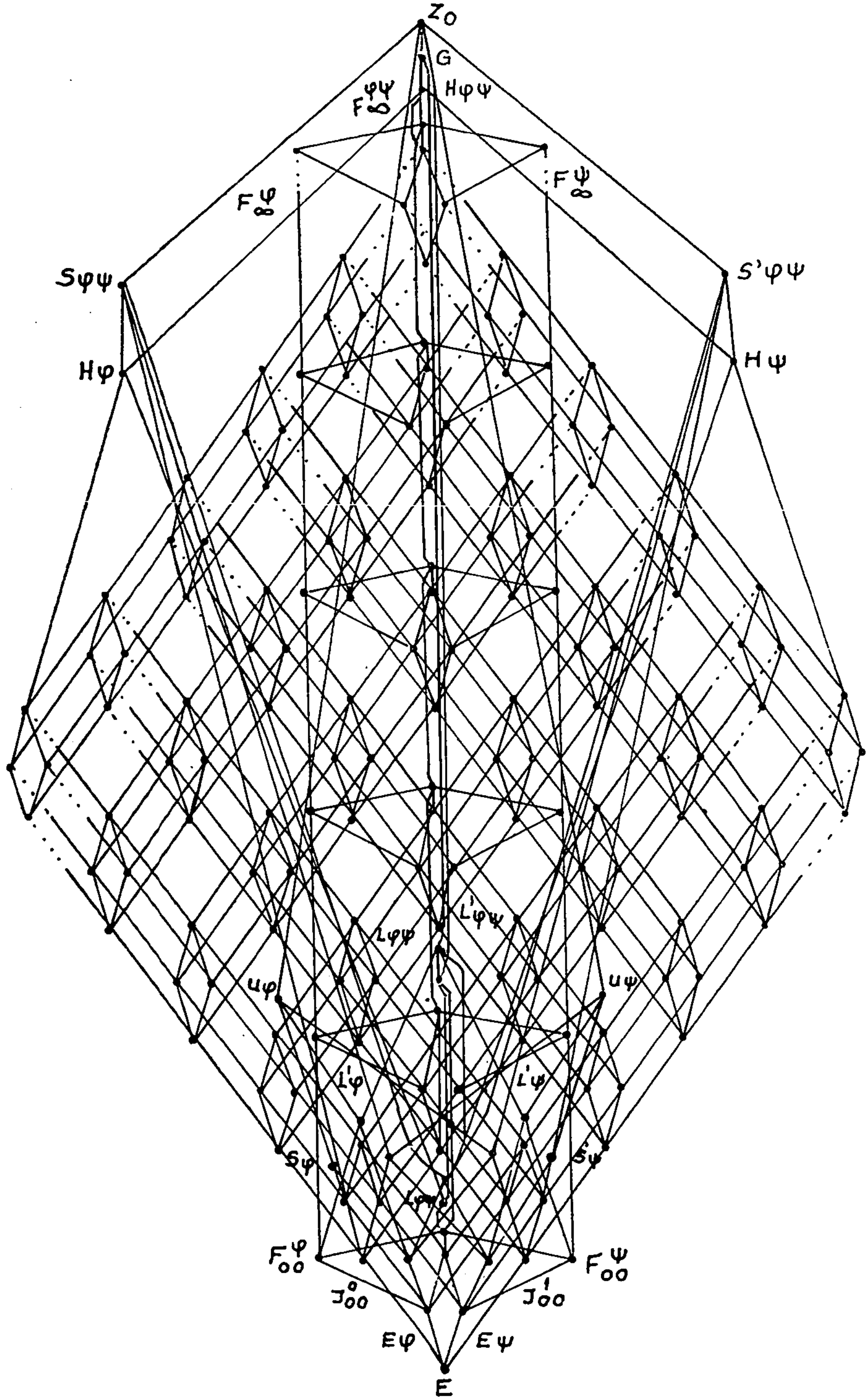

Zo
G
Hφψ
$F_\infty^{\varphi\psi}$
F_∞^{φ}
F_∞^{ψ}
Sφψ
S'φψ
Hφ
Hψ
Lφψ
L'φψ
uφ
uψ
L'φ
L'ψ
Sφ
Sψ
F_{00}^{φ}
F_{00}^{ψ}
J_{00}^{0}
J_{00}^{1}
Eφ
Eψ
E

Рис. 2

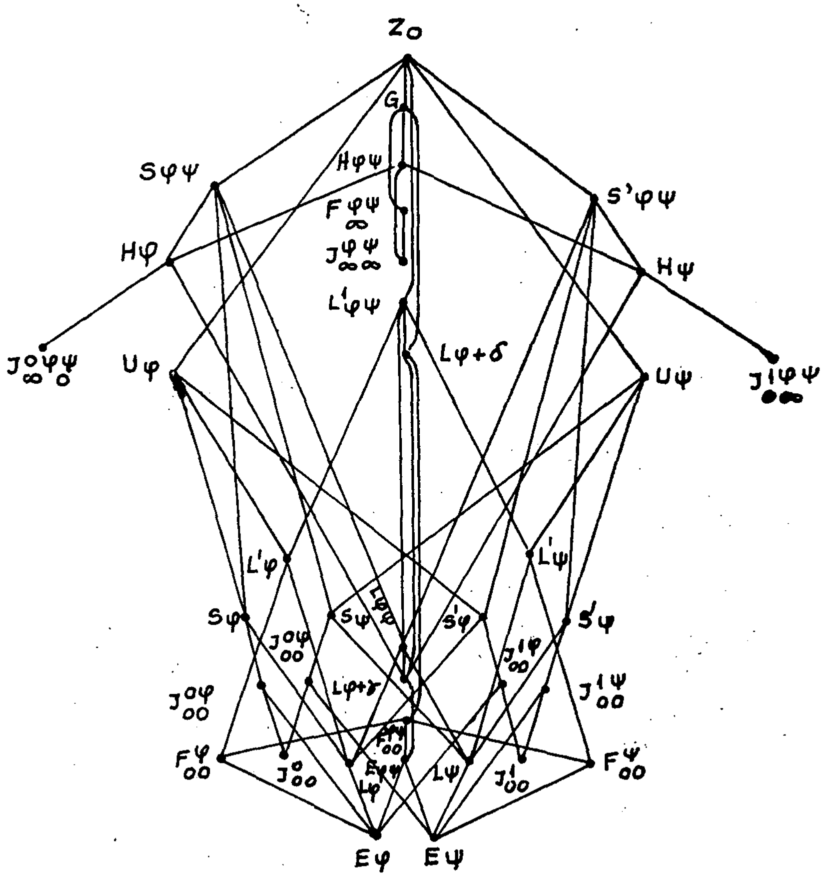


Рис. 3

В дальнейшем везде знак + означает сложение по модулю 2. Первые восемь функций, указанных в таблице 1, позволяют используя разложение (1.1) задать любую функцию из клона Z_0, образованного теми функциями клона B, значения которых попадают в множество $\{0, 1\}$.

Таблица 1

x	φ_0	ψ_0	γ_0	δ_0	$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\psi}_0$	c_0	c_1	λ_2
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	1	0	0	1	2

Более того, так как $\delta_0(x)=1+\gamma_0(x)$, $\bar{\varphi}_0(x)=1+\varphi_0(x)$ и $\bar{\psi}_0(x)=1+\psi_0(x)$, то любая отличная от проекции функция из Z_0 может быть единственным образом

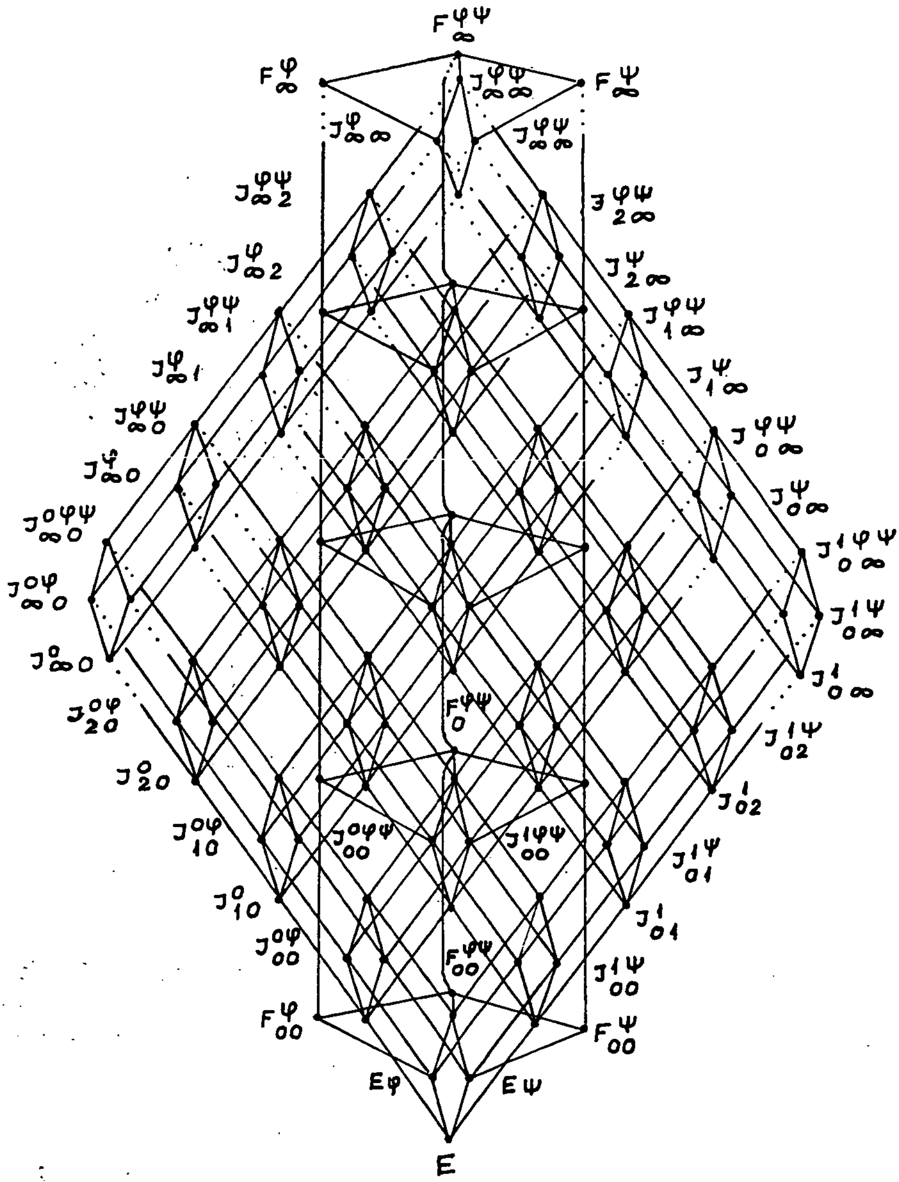

$F^{\varphi\psi}_{\infty}$
F^{φ}_{∞}
$J^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$
F^{ψ}_{∞}
$J^{\varphi}_{\infty\infty}$
$J^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$
$J^{\varphi\psi}_{\infty 2}$
$J^{\varphi\psi}_{2\infty}$
$J^{\varphi}_{\infty 2}$
$J^{\psi}_{2\infty}$
$J^{\varphi\psi}_{\infty 1}$
$J^{\varphi\psi}_{1\infty}$
$J^{\varphi}_{\infty 1}$
$J^{\psi}_{1\infty}$
$J^{\varphi\psi}_{\infty 0}$
$J^{\varphi\psi}_{0\infty}$
$J^{\varphi}_{\infty 0}$
$J^{\psi}_{0\infty}$
$J^{0\varphi\psi}_{\infty 0}$
$J^{1\varphi\psi}_{0\infty}$
$J^{0\varphi}_{\infty 0}$
$J^{1\psi}_{0\infty}$
$J^{0}_{\infty 0}$
$J^{1}_{0\infty}$
$J^{0\varphi}_{20}$
$J^{1\psi}_{02}$
$F^{\varphi\psi}_{0}$
J^{0}_{20}
J^{1}_{02}
$J^{0\varphi}_{10}$
$J^{0\varphi\psi}_{00}$
$J^{1\varphi\psi}_{00}$
$J^{1\psi}_{01}$
J^{0}_{10}
J^{1}_{01}
$J^{0\varphi}_{00}$
$F^{\varphi\psi}_{00}$
$J^{1\psi}_{00}$
F^{φ}_{00}
F^{ψ}_{00}
$E\varphi$
$E\psi$
E

Рис. 4

записана в виде

$$h(x_1, \ldots, x_n) = c + \sum_{j=1}^{g} \gamma_0(x_{i_j}) + \sum_{j=g+1}^{g+f} \varphi_0(x_{i_j}) + \sum_{j=g+f+1}^{g+f+p} \psi_0(x_{i_j}),$$

где $c \in \{0, 1\}$, $g, f, p \geqq 0$, а индексы $1 \leqq i_1, \ldots, i_{g+f+p} \leqq n$ попарно различны. Как правило нас не интересует порядок слагаемых и функция h будет кратко записываться как $c + g\gamma_0 + f\varphi_0 + p\psi_0$. Если число слагаемых невелико, то, например, вместо $\varphi_0(x_1) + \gamma_0(x_2)$, $1 + \psi_0(x_1) + \psi_0(x_2)$ будем писать $\varphi_0 + \gamma_0$, $1 + \psi_0 + \psi_0$ и т. п. В подобных сокращенных записях будут использоваться и другие одноместные функции, которые будут введены позднее. Введем также специальные обозначения для некоторых многоместных функций:

$$f_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_i(x_1) + \ldots + \gamma_i(x_n),$$

$$u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1) + \ldots + \varphi_i(x_n),$$

$$P_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \psi_i(x_1) + \ldots + \psi_i(x_n).$$

Выражения вида $f_i^n + u_i^m + \ldots$ будет сокращением для

$$f_i^n(x_1, \ldots, x_n) + u_i^m(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) + \ldots$$

По определению полагаем $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.

Очевидно, запись $c + g\gamma_0 + f\varphi_0 + p\psi_0$ относится не к одной функции, а к целому семейству функций со следующим общим свойством: для любых двух функций этого семейства можно перейти от одной функции к другой путем введения или опускания фиктивных переменных и изменения порядка слагаемых. Кажный подклон клона B представляет собой объединение подобных множеств, пополненное проекциями.

Пусть $\mu \in O_A$ — одноместная функция, принимающая три значения, $f \in B$. Если

$$f^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \mu(f(\mu^{-1}(x_1), \ldots, \mu^{-1}(x_n))),$$

то α: $f \to f^\alpha$ —автоморфизм клона B. Функцию f^α мы будем называть μ-двойственной к f. Если K — подклон клона B и $\mu K = \{f^\alpha | f \in K\}$, то клон μK будем называть μ-двойственным клону K. При $\mu K = K$ клон K назовем μ-самодвойственным.

В таблице 2 (из работы [6]) для каждого подклона клона Z_0 указан пример базиса, λ_2-двойственный клон, а также указаны все функции, в нем содержащиеся (проекции опущены).

Таблица 2

Клон	λ_2-двойственный клон	Пример базиса или порождающего множества	Вид функций, принадлежащих клону
E	E	e_2^2	e_t^n
E_φ	E_ψ	φ_0	φ_0
$E_{\varphi\psi}$	$E_{\varphi\psi}$	φ_0, ψ_0	φ_0, ψ_0
I_{l0}^{0}	I_{0l}^{1}	f_0^l	$f_0^n \ (n \leqq l)$
$I_{l0}^{0\varphi}$	$I_{0l}^{1\psi}$	φ_0, f_0^l	$\varphi_0, f_0^n \ (n \leqq l)$
$I_{l0}^{0\psi}$	$I_{0l}^{1\varphi}$	ψ_0, f_0^l	$\psi_0, f_0^n \ (n \leqq l)$
$I_{l0}^{0\varphi\psi}$	$I_{0l}^{1\varphi\psi}$	φ_0, ψ_0, f_0^l	$\varphi_0, \psi_0, f_0^n \ (n \leqq l)$
I_{lm}	I_{ml}	$f_0^l, 1+f_0^m$	$f_0^{n_1} \ (n_1 \leqq l)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
I_{lm}^{φ}	I_{ml}^{ψ}	$\varphi_0, f_0^l, 1+f_0^m$	$\varphi_0, f_0^{n_1} \ (n_1 \leqq l)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
I_{lm}^{ψ}	I_{ml}^{φ}	$\psi_0, f_0^l, 1+f_0^m$	$\psi_0, f_0^{n_1} \ (n_1 \leqq l)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
$I_{lm}^{\varphi\psi}$	$I_{ml}^{\varphi\psi}$	$\varphi_0, \psi_0, f_0^l, 1+f_0^m$	$\varphi_0, \psi_0, f_0^{n_1} \ (n_1 \leqq l)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
$I_{\infty 0}^{0}$	$I_{0\infty}^{1}$	базнса нет $f_0^l \ (l=1, 2, \ldots)$	$f_0^n \ (n \geqq 0)$
$I_{\infty 0}^{0\varphi}$	$I_{0\infty}^{1\psi}$	базиса нет $\varphi_0, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots)$	$\varphi_0, f_0^n \ (n \geqq 0)$
$I_{\infty}^{0\psi}$	$I_{0\infty}^{1\varphi}$	базиса нет $\psi_0, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots)$	$\psi_0, f_0^n \ (n \geqq 0)$
$I_{\infty 0}^{0\varphi\psi}$	$I_{0\infty}^{1\varphi\psi}$	базиса нет $\varphi_0, \psi_0, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots)$	φ_0, ψ_0, f_0^n $(n \geqq 0)$
$I_{\infty m}$	$I_{m\infty}$	базиса нет $1+f_0^m, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots)$	$f_0^{n_1} \ (n_1 \geqq 0)$ $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
$I_{\infty m}^{\varphi}$	$I_{m\infty}^{\psi}$	базиса нет $\varphi_0, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots), \ 1+f_0^m$	$\varphi_0, f_0^{n_1} \ (n_1 \geqq 0)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
$I_{\infty m}^{\psi}$	$I_{m\infty}^{\varphi}$	базиса нет $\psi_0, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots), \ 1+f_0^m$	$\psi_0, f_0^{n_1} \ (n_1 \geqq 0)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
$I_{\infty m}^{\varphi\psi}$	$I_{m\infty}^{\varphi\psi}$	базиса нет $\varphi_0, \psi_0, f_0^l \ (l=1, 2, \ldots), \ 1+f_0^m$	$\varphi_0, \psi_0, f_0^{n_1} \ (n_1 \geqq 0)$, $1+f_0^{n_2} \ (n_2 \leqq m)$
$I_{\infty\infty}$	$I_{\infty\infty}$	базиса нет $f_0^m, 1+f_0^m \ (m=1, 2, \ldots)$	$f_0^n, 1+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
$I_{\infty\infty}^{\varphi}$	$I_{\infty\infty}^{\psi}$	базиса нет $\varphi_0, f_0^m, 1+f_0^m \ (m=1, 2, \ldots)$	$\varphi_0, f_0^n, 1+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
$I_{\infty\infty}^{\varphi\psi}$	$I_{\infty\infty}^{\varphi\psi}$	базиса нет $\varphi_0, \psi_0, f_0^m, 1+f_0^m \ (m=1, 2, \ldots)$	φ_0, ψ_0, f_0^n, $1+f_0^n \ (n \geqq 0)$
F_{00}^{φ}	F_{00}^{ψ}	$\bar{\varphi}_0$	$\varphi_0, \bar{\varphi}_0$
$F_{00}^{\varphi\psi}$	$F_{00}^{\varphi\psi}$	$\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0$	$\varphi_0, \bar{\varphi}_0, \psi_0, \bar{\psi}_0$
F_m^{φ}	F_m^{ψ}	$\bar{\varphi}_0, f_0$	$\varphi_0, \bar{\varphi}_0, f_0^n, 1+f_0^n$ $(n \leqq m)$

Таблица 2 (продолжение)

Клон	λ_2-двойственный клон	Пример базиса или порождающего множества	Вид функцуй, принадлежащих клону
$F_m^{\varphi\psi}$	$F_m^{\varphi\psi}$	$\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0, f_0^m$	$\varphi_0, \bar{\varphi}_0, \psi_0, \bar{\psi}_0, f_0^n,$ $1+f_0^n$ $(n \leqq m)$
F_∞^φ	F_∞^ψ	$\bar{\varphi}_0, f_0^m$ $(m=1, 2, \ldots)$	$\varphi_0, \bar{\varphi}_0, f_0^n,$ $1+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
$F_\infty^{\varphi\psi}$	$F_\infty^{\varphi\psi}$	$\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0, f_0^m$ $(m=1, 2, \ldots)$	$\varphi_0, \bar{\varphi}_0, \psi_0, \bar{\psi}_0, f_0^n,$ $1+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
L_φ	L_ψ	u_0^3	u_0^{2k+1} $(k>0)$
S_φ	S'_ψ	u_0^2	u_0^n $(n \geqq 0)$
L'_φ	L'_ψ	$1+u_0^3$	$u_0^{2k+1}, 1+u_0^{2k+1}$ $(k \geqq 0)$
S'_φ	S_ψ	$1+u_0^2$	$u_0^{2k+1}, 1+u_0^{2k}$ $(k \geqq 0)$
U_φ	U_ψ	$u_0^2, 1+u_0^2$	$u_0^n, 1+u_0^n$ $(n \geqq 0)$
$L_{\varphi+\gamma}$	$L_{\varphi+\gamma}$	$\varphi_0+\gamma_0$	$\varphi_0+f_0^n, \psi_0+f_0^n$
$L_{\varphi\psi}$	$L_{\varphi\psi}$	u_0^3, p_0^3	$g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0,$ $f+p=2k+1$
$L_{\varphi+\delta}$	$L_{\varphi+\psi}$	$1+\gamma_0+\varphi_0$	$c+\varphi_0+f_0^n, c+\psi_0+f_0^n,$ $(c \in \{0, 1\},\ n \geqq 0)$
$L_{\varphi\psi}^1$	$L_{\varphi\psi}^1$	$1+\varphi_0+\psi_0+\psi_0$	$c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0,$ $f+p=2k+1$
H_φ	H_ψ	$\varphi_0+\gamma_0, c_0$	$f_0^n, \varphi_0+f_0^n, \psi_0+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
$S_{\varphi\psi}$	$S'_{\varphi\psi}$	$\varphi_0+\psi_0$	$g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0$
$H_{\varphi\psi}$	$H_{\varphi\psi}$	$\varphi_0+\gamma_0, c_0, c_1$	$f_0^n, 1+f_0^n, \varphi_0+f_0^n,$ $\psi_0+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
G	G	$\varphi_0+\gamma_0, \bar{\varphi}_0, c_0$	$c+f_0^n, c+\varphi_0+f_0^n,$ $c+\psi_0+f_0^n$ $(n \geqq 0)$
Z_0	Z_0	$\varphi_0+\psi_0, \bar{\varphi}_0$	$c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0.$

2. Метод дальнейшего описания подклонов клона B

Для описания всех подклонов клона B достаточно привести список всех таких подклонов. Однако если этим и ограничиться, то останутся без ответа следующие важные вопросы: каково взаимное расположение этих подклонов, какие функции содержит каждый подклон, какие у него имеются максимальные подклоны. Конечно, многое зависит от способа задания подклонов, однако в любом случае трудно ожидать, что конкретный список даст удовлетворительный ответ на каждый из этих вопросов. К тому же весьма трудной представляется проблема доказательства полноты такого списка.

Исключительно удобным и наглядным является задание решетки с помощью ее диаграммы. Достаточно взглянуть на диаграмму решетки Поста $\mathscr{L}(\mathscr{F}_A^*)$ всех подалгебр алгебры $\mathscr{F}_A^*$, $|A|=2$, [13], чтобы получить ответ на многие вопросы: конечная она или бесконечная, какова ее высота, ширина и т. д. Приведенная там же таблица подалгебр вместе с указанной диаграммой дает полную информацию об элементах решетки. Аналогичную задачу нам удалось решить в работе [6]: Построена диаграмма решетки $\mathscr{L}(Z_0)$ подклонов клона Z_0 и приведен список всех подклонов с указанием базисов, содержащихся функций и т. д.

К сожалению, поступить подобным образом при описании подклонов клона B мы не сможем. Решетка $\mathscr{L}(B)$ содержит 3 копии решетки $\mathscr{L}(Z_0)$, технически уже трудно изобразить их на одном рисунке. В дальнейшем будет показано, что средняя часть решетки $\mathscr{L}(B)$ устроена ёще сложнее.

Чтобы обойти указанные трудности и в тоже время получить достаточно наглядное представление о строении решетки $\mathscr{L}(B)$, примем следующий план. Пусть все подклоны клона B составляют внутренность шестиугольника на рисунке 5. Треугольники a, b, c содержат клоны, значения функций которых попадают в множества $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, и $\{1, 2\}$ соответственно. Таким образом треугольник a содержит все подклоны клона Z_0. Образуемая ими решетка изображена на рисунке 1, а сами клоны, их базисы и функции указаны в таблице 2. Очевидно, треугольники b и c содержат лишь изоморфные копии клонов, содержащихся в треугольнике a. Пунктирная линия, делящая треугольник a пополам, указывает на существование автоморфизма клона Z_0, вследствие чего в описании нуждается лишь часть его подклонов.

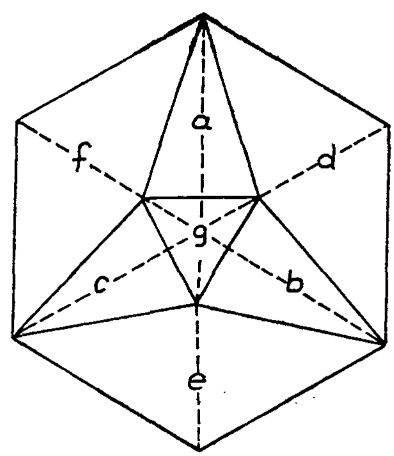


Рис. 5

Данная работа посвящена описанию клонов, попадающих в четырехугольник d — клонов, содержащих как функции, значения которых принадлежат множеству $\{0, 1\}$, так и функции, значения которых принадлежат множеству $\{0, 2\}$. К сожалению, образуемая этими клонами решетка уже настолько сложна, что изобразить ее на одном рисунке невозможно, и мы довольствуемся тем, что рисуем отдельные ее фрагменты, получаемые следующим образом. Берется некоторый фрагмент решетки $\mathscr{L}(Z_0)$ (чаще интервал) и для каждого клона K из этого фрагмента строится новый клон ${}^{\mu}K$ следующим образом: к порождающим клона K добавляется функция $\mu \notin Z_0$, получается система порождающих клона ${}^{\mu}K$. В некоторых случаях получаем семейство клонов, для элементов которого включения очевидны, и мы довольствуемся диаграммой. В более сложных случаях дается доказательство.

Пунктирная линия в четырехугольнике d также указывает на наличие автоморфма, позволяющего описывать лишь клоны, принадлежащие одному из двух треугольников. Область e содержит клоны функций типов c и b, область f-клоны типов a и c. Очевидно, обе они в отдельном описании не нуждаются.

Ограниченный объем статьи не позволяет привести описание клонов, содержащих одновременно функции всех трех типов-клонов, попадающих в треугольник g. Этих клонов относительно немного, что упрощает построения. В треугольнике g также находятся клоны, содержащие одноместные функции, принадлежащие три значения.

3. Клоны типов ${}^{\varphi}K$, ${}^{2}K$, ${}^{2\varphi}K$, ${}^{\bar\varphi}K$ при $K \leqq Z_0$

Пусть K-подклон клона Z_0, Z_2-клон, образованный теми функциями из B, значения которых принадлежат множеству $\{0, 2\}$, $\mu \in Z_2$, M — система порождающих функций клона K. Клон, порождаемый множеством $M \cup \{\mu\}$ будем обозначать либо через $K \sqcup \mu$, либо через ${}^{\mu}K$. В данном параграфе последнее обозначение будет употребляться только в том случае, когда K является максимальным подклоном клона $K \sqcup \mu$. Поскольку клонов такого типа много, то их описание, описание их максимальных подклонов и даже описание их обозначений получаются очень громоздкими. С целью упрощения изложения мы приводим рисунки, из которых легко уяснить обозначения вновь появляющихся клонов, их взаимное разположение, выделить все максимальные подклоны.

В дальнейшем через f^{∇} будет обозначаться множество всех тех функций, которые могут быть получены из $f \in O_A$ добавлением и изъятием несущественных переменных и применением операций ζ и τ. Введем специальные обозначения для девяти одноместных функций. Первые восемь из них принадлежат клону Z_2 и λ_0-двойственны одноместным функциям клона Z_0 (Табл. 3).

Сначала мы опишем клоны, порождаемые функциями подклонов клона $F_{\infty}^{\varphi\psi}$ (см. рисунок 3) вместе с функциями φ_2, c_2 или $\bar\varphi_2$. Рисунок 6 дает представление о взаимном расположении описываемых интервалов (заштрихованы) в решетке $\mathscr{L}(B)$. Эти интервалы не изоморфны друг другу, однако по меньшей мере три средних изоморфно вкладываются в решетку $\mathscr{L}(F_{\infty}^{\varphi\psi})$, то есть в нижний интервал.

Пусть $K \leqq F_{\infty}^{\varphi\psi}$. Так как $\varphi_2 * \varrho = c_0$ для любой функции $\varrho \in Z_0$, $\varrho \notin E$, то клон $K \sqcup \varphi_2$ содержит c_0. Из $\psi_2 * \varphi_2 = \gamma_0$ следует, что $\psi_0 \in K \Rightarrow \gamma_0 \in K \sqcup \varphi_2$. Равенства $\gamma_0 * \varphi_2 = \gamma_0$, $\varphi_0 * \varphi_2 = c_0$ показывают, что если клон K содержит γ_0, то $K \sqcup \varphi_2$ отличается от него лишь функциями из φ_2^{∇}. Очевидно, для любого $K \leqq F_{\infty}^{\varphi\psi}$ клон K является максимальным подклоном клона $K \sqcup \varphi_2$. Получаем семейство клонов, образующее решетку, изображенную на рисунке 7. Из этого рисунка легко определить все отличные от K максимальные подклоны клона ${}^{\varphi}K$.

Подклоны клона Z_{02}, λ_0-двойственные подклонам клона ${}^{\varphi}F_{\infty}^{\varphi\psi}$, образуют решетку, изоморфную решетке $\mathscr{L}({}^{\varphi}F_{\infty}^{\varphi\psi})$. Согласно заключенному выше соглашению, их обозначения получаем добавлением к обозначениям соответст-

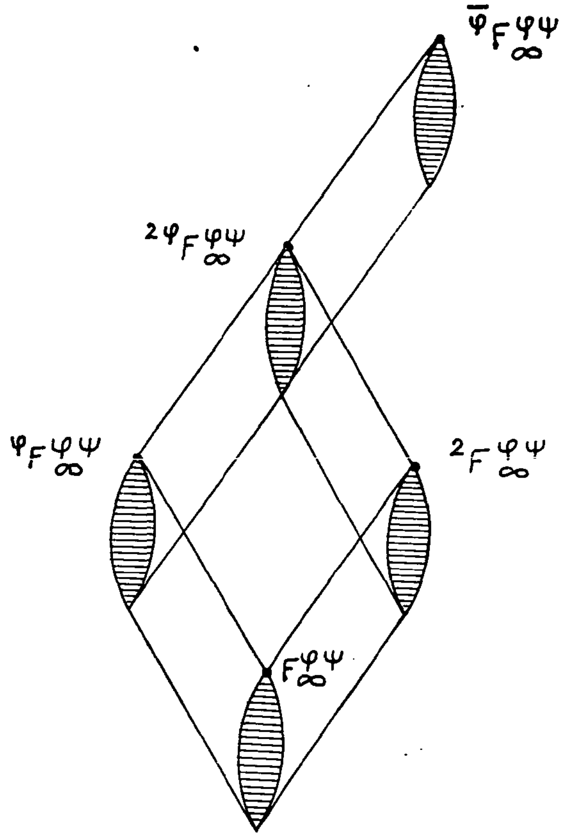


Рис. 6

вующих подклонов клона $^{\varphi}F_\infty^{\varphi\psi}$ слева внизу индекса λ_0. Решетки $\mathscr{L}(^{\varphi}F_\infty^{\varphi\psi})$ и $\mathscr{L}(^{\varphi}_{\lambda_0}F_\infty^{\varphi\psi})$ имеют несколько общих элементов. Так как клоны первой решетки из одноместных функций могут содержать лишь e_1', c_0, c_1, $\varphi_0, \psi_0, \gamma_0, \bar\varphi_0, \varphi_2$, а второй — e_1^1, c_0, c_2, φ_2, ψ_2, γ_2, $\bar\varphi_2$, φ_0, то общими являются только клоны, содержащие e_1^1, c_0, φ_0, φ_2, то есть E, $^{\varphi}E$, I_{00}^0, $^{\varphi}I_{00}^0$, E_φ, $I_{00}^{0\varphi}$, $^{\varphi}I_{00}^{0\varphi}$.

Так как $\gamma_0 * c_2 = c_1$, то из $f_n \in K$ и $1+f^m \in K$ следует, что $1+f_{n-1} \in K \sqcup c_2$ и $f_{m-1} \in K \sqcup c_2$ для любого $K \leqq F_\infty^{\varphi\psi}$. Если $K \sqcup c_2$ содержит φ_0 или $\bar\psi_0$, то он содержит и c_0, а из $\psi \in K \sqcup c_2$ или $\bar\varphi \in K \sqcup c_2$ следует $c_1 \in K \sqcup c_2$. Легко убедиться, что в остальном клон $K \sqcup c_2$ отличается от K лишь функциями из c_2^∇. Клоны указанного вида образуют решетку, изображенную на рисунке 8. В пересечение $\mathscr{L}(^{2}F_\infty^{\varphi\psi})$ с $\mathscr{L}(^{2}_{\lambda_0}F_\infty^{\varphi\psi})$ попадают клоны E и I_{00}.

Переходя к описанию клонов вида $^{2}K \sqcup \varphi_2$, где $^{2}K \leqq F_\infty^{\varphi\psi}$, заметим, что все комбинации содержащихся в $^{2}K \sqcup \varphi_2$ функций уже рассмотрены, кроме $\varphi_2 * c_2 = c_2 * \varphi_2 = c_2$, которые показывают, что $^{2}K \sqcup \varphi_2 = {}^{2}K \cup \varphi_2^\nabla$, то есть $^{2}K \sqcup \varphi_2 = {}^{\varphi 2}K = {}^{2\varphi}K$. Клоны вида $^{2\varphi}K$ образуют решетку, изображенную на рисунке

9. Кроме клонов, изображенных на этом рисунке, максимальными подклонами клона ${}^{2\varphi}K$ являются клоны ${}^{2}K$ и ${}^{\varphi}K$.

Так как $\bar{\varphi}_2 * \varrho = c_2$ для любого $\varrho \in Z_0$ и $\varphi_2 * \varphi_2 = \varphi_2$, то клон $K \sqcup \bar{\varphi}$, $K \leqq F_\infty^{\varphi\psi}$, содержит c_2 и φ_2, то есть $K \sqcup \bar{\varphi}_2 = {}^{2\varphi}K \sqcup \bar{\varphi}_2$. Из $\gamma_0 * \bar{\varphi}_2 = \delta_0$, $\delta_0 * \bar{\varphi}_2 = \gamma_0$ следует важный вывод: если $f_n \in {}^{2\varphi}K \sqcup \varphi_2$, $1 + f_m \in {}^{2\varphi}K \sqcup \varphi_2$, то $1 + f_n \in {}^{2\varphi}K \sqcup \varphi_2$ и $f_m \in {}^{2\varphi}K \sqcup \sqcup \varphi_2$. Имеются еще равенства

$$\varphi_0 * \bar{\varphi}_2 = c_0, \quad \psi_0 * \varphi_2 = \delta_0, \quad \bar{\varphi}_0 * \bar{\varphi}_2 = c_1, \quad \bar{\psi}_0 * \bar{\varphi}_2 = \gamma_0, \quad \bar{\varphi}_2 * c_2 = c_0,$$

однако если ${}^{2\varphi}K \geqq {}^{2\varphi}I_{11}$, то $\{c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \delta_0\} \subseteq {}^{2\varphi}K$. Получаем решетку клонов вида ${}^{\bar{\varphi}}K$ (рисунок 10).

Клонов вида $K \sqcup \varrho_1$, $K \sqcup \{\varrho_1, \varrho_2\}$, где $\varrho_1, \varrho_2 \in \{\varphi_2, \bar{\varphi}_2, c_2\}$ и $K \nleqq F_\infty^{\varphi\psi}$, $K \leqq Z_0$ лишь конечное число, и притом небольшое. Все они указаны в таблице 4, которая одновременно является и доказательством отсутствия других клонов указанного вида. Сама таблица получена следующим образом. Берется клон K, удовлетворяющий указанным выше ограничениям. Из таблицы 2 находится вид функций, в нем содержащихся. Учитывая результаты суперпозиций $\mu * \varrho$, где μ — функция из Z_0, а $\varrho \in \{\varphi_2, c_2, \bar{\varphi}_2\}$, находим вид функций клонов $K \sqcup \varphi_2$, $K \sqcup c_2$, $K \sqcup \varphi_2 \sqcup c_2$, $K \sqcup \bar{\varphi}_2$. По таблице 2 устанавливаем максимальный подклон этого клона.

Для удобства читателя в таблице 5 указан состав клонов $L_\psi - S'_{\varphi\psi}$. Функции новых клонов из таблицы 4 легко находятся по следующим правилам:

$${}^{\varphi}K = K \cup \varphi_2^{\nabla}, \quad {}^{2}K = K \cup c_2^{\nabla}, \quad {}^{2\varphi}K = K \cup \{\varphi_2^{\nabla}, c_2^{\nabla}\}, \quad {}^{\bar{\varphi}}K = K \cup \{\varphi_2^{\nabla}, \bar{\varphi}_2^{\nabla}, c_2^{\nabla}\}$$

Таблица 4

K	$K \sqcup \varphi_2$	$K \sqcup c_2$	$K \sqcup \varphi_2 \sqcup c_2$	$K \sqcup \bar{\varphi}_2$
L_φ	${}^{\varphi}S_\varphi$	${}^{2}S_\varphi$	${}^{2\varphi}S_\varphi$	${}^{\bar{\varphi}}S_\varphi$
S_φ	${}^{\varphi}S_\varphi$	${}^{2}S_\varphi$	${}^{\varphi}S_\varphi$	${}^{\bar{\varphi}}U_\varphi$
L'_φ	${}^{\varphi}U_\varphi$	${}^{2}U_\varphi$	${}^{2\varphi}U_\varphi$	${}^{\bar{\varphi}}U_\varphi$
S'_φ	${}^{\varphi}U_\varphi$	${}^{2}U_\varphi$	${}^{2\varphi}U_\varphi$	${}^{\bar{\varphi}}U_\varphi$
U_φ	${}^{\varphi}U_\varphi$	${}^{2}U_\varphi$	${}^{\varphi}U_\varphi$	${}^{\bar{\varphi}}U_\varphi$
$L_{\varphi+\gamma}$	${}^{\varphi}H_\varphi$	${}^{2}H_{\varphi\psi}$	${}^{2\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{\bar{\varphi}}G$
$L_{\varphi\psi}$	${}^{\varphi}S_{\varphi\psi}$	${}^{2}Z_0$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
$L_{\varphi+\delta}$	${}^{\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{2}H_{\varphi\psi}$	${}^{2\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{\bar{\varphi}}G$
$L^1_{\varphi\psi}$	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{2}Z_0$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
H_φ	${}^{\varphi}H_\varphi$	${}^{2}H_{\varphi\psi}$	${}^{2\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{\bar{\varphi}}G$
$S_{\varphi\psi}$	${}^{\varphi}S_{\varphi\psi}$	${}^{2}Z_0$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
$H_{\varphi\psi}$	${}^{\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{2}H_{\varphi\psi}$	${}^{2\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{\bar{\varphi}}G$
G	${}^{\varphi}G$	${}^{2}G$	${}^{2\varphi}G$	${}^{\bar{\varphi}}G$
Z_0	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{2}Z_0$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
L_ψ	${}^{\varphi}S_{\varphi\psi}$	${}^{2}S'_\psi$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
S'_ψ	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{2}S'_\psi$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
L'_ψ	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{2}U_\psi$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
S_ψ	${}^{\varphi}S_{\varphi\psi}$	${}^{2}U_\psi$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
U_ψ	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{2}U_\psi$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$
H_ψ	${}^{\varphi}H_\psi$	${}^{2}H_{\varphi\psi}$	${}^{2\varphi}H_{\varphi\psi}$	${}^{\bar{\varphi}}G$
$S'_{\varphi\psi}$	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{\varphi}Z_0$	${}^{2\varphi}Z_0$	${}^{\bar{\varphi}}Z_0$

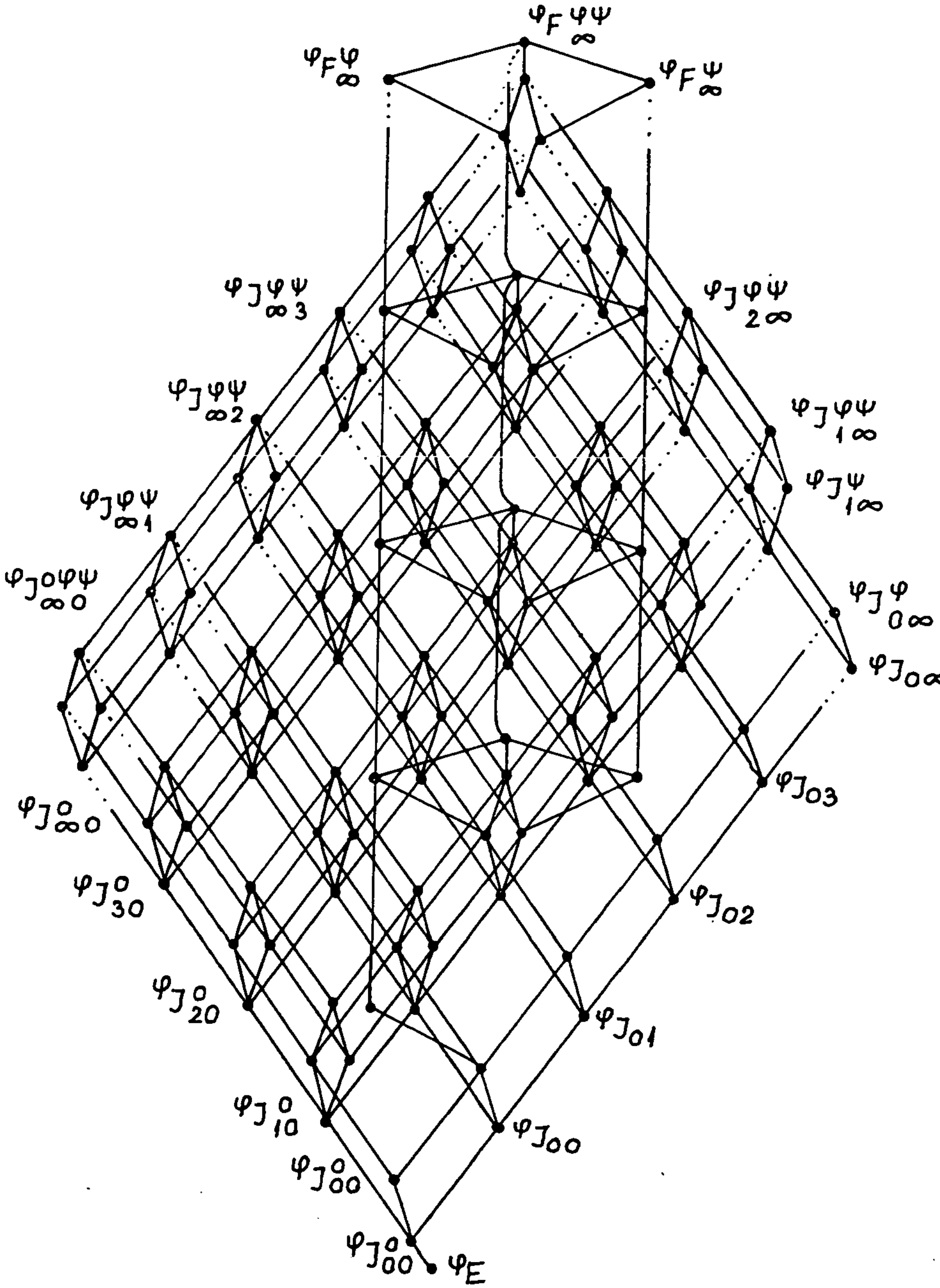

φF φψ ∞
φF φ ∞
φF ψ ∞
φJ φψ ∞3
φJ φψ 2∞
φJ φψ ∞2
φJ φψ 1∞
φJ ψ 1∞
φJ φψ ∞1
φJ0 φψ ∞0
φJ φ 0∞
φJ0∞
φJ03
φJ 0 ∞0
φJ 0 30
φJ02
φJ 0 20
φJ01
φJ 0 10
φJ00
φJ 0 00
φJ 0 00
φE

Рис. 7

Таблица 5

Клон	Базис	Содержит функции
L_ψ	p_0^3	p_0^{2k+1}
S'_ψ	$1+p_0^2$	p_0^{2k+1}, $1+p_0^{2k}$
L'_ψ	$1+p_0^3$	p_0^{2k+1}, $1+p_0^{2k+1}$
S_ψ	p_0^2	p_0^n
U_ψ	p_0^2, $1+p_0^2$	p_0^n, $1+p_0^n$
H_ψ	$\psi_0+\gamma_0$, c_1	$1+f_0^n$, $\psi_0+f_0^n$, $\varphi_0+f_0^n$
S'_φ	$1+\varphi_0+\psi_0$	$1+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0$, $f+p=2k$, $g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0$, $f+p=2k+1$.

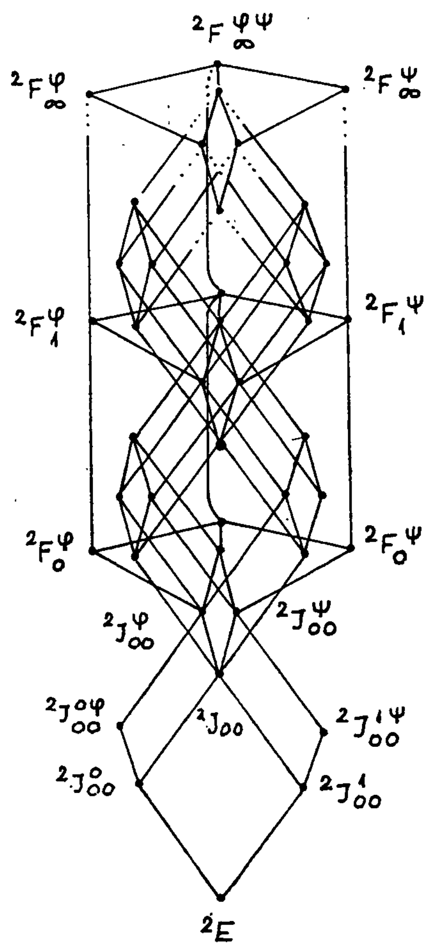
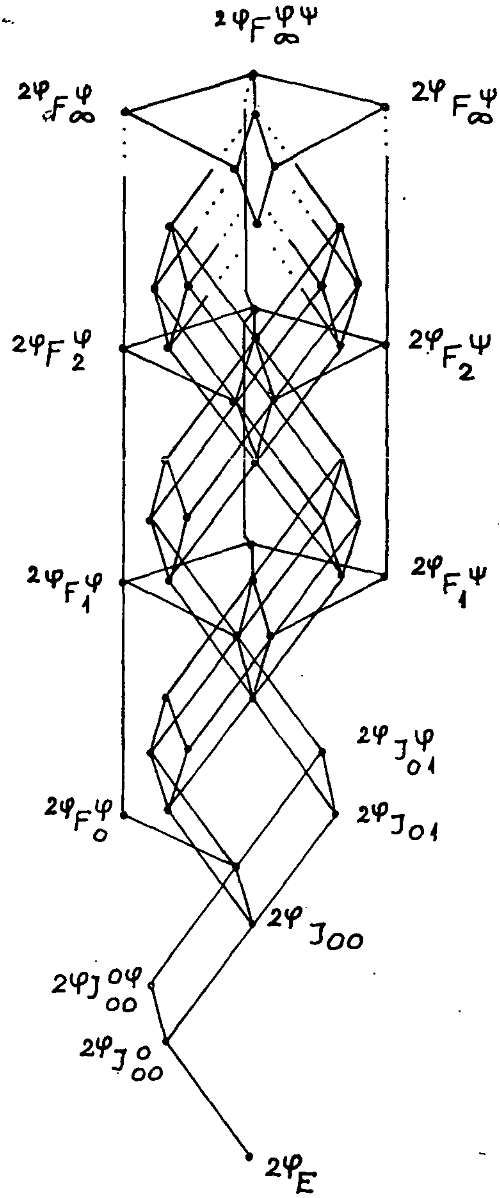
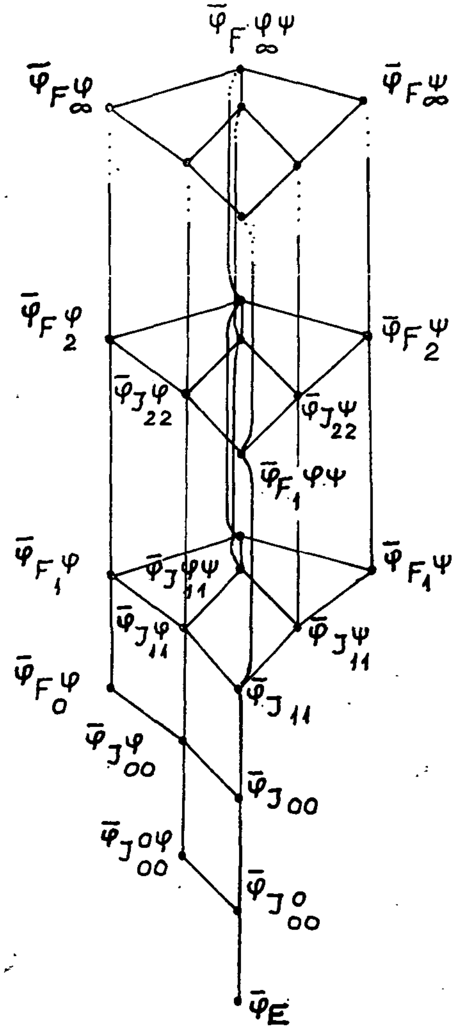


Рис. 8



$^{2\varphi}F_\infty^{\varphi\psi}$
$^{2\varphi}F_\infty^{\varphi}$
$^{2\varphi}F_\infty^{\psi}$
$^{2\varphi}F_2^{\varphi}$
$^{2\varphi}F_2^{\psi}$
$^{2\varphi}F_1^{\varphi}$
$^{2\varphi}F_1^{\psi}$
$^{2\varphi}J_{01}^{\varphi}$
$^{2\varphi}F_0^{\varphi}$
$^{2\varphi}J_{01}$
$^{2\varphi}J_{00}$
$^{2\varphi}J_{00}^{0\varphi}$
$^{2\varphi}J_{00}^{0}$
$^{2\varphi}E$

Рис. 9



$^{\bar\varphi}F_\infty^{\varphi\psi}$
$^{\bar\varphi}F_\infty^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}F_\infty^{\psi}$
$^{\bar\varphi}F_2^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}F_2^{\psi}$
$^{\bar\varphi}J_{22}^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}J_{22}^{\psi}$
$^{\bar\varphi}F_1^{\varphi\psi}$
$^{\bar\varphi}F_1^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}J_{11}^{\varphi\psi}$
$^{\bar\varphi}F_1^{\psi}$
$^{\bar\varphi}J_{11}^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}J_{11}^{\psi}$
$^{\bar\varphi}F_0^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}J_{11}$
$^{\bar\varphi}J_{00}^{\varphi}$
$^{\bar\varphi}J_{00}$
$^{\bar\varphi}J_{00}^{0\varphi}$
$^{\bar\varphi}J_{00}^{0}$
$^{\bar\varphi}E$

Рис. 10

Рисунок 11 дает наглядное представление о взаимном расположении новых клонов. Здесь легко заметить «слоистость» в строении, отмеченную на рисунке 6. Читатель может выделить эти слои и присоединить их к соответствующим слоям на рисунках 7—10.

4. Другие подклоны клона $Z_0 \cup Z_2$, порождаемые с помощью унарных функций из Z_2

Большое количество клонов, описанных в предыдущем параграфе, объясняется определенной «нейтральностью» функций φ_2, $\bar{\varphi}_2$, c_2 по отношению к функциям из Z_0: функции φ_2, $\bar{\varphi}_2$, c_2 не меняют значения при изменении переменной на множестве $0, 1$. Оставшиеся одноместные функции из Z_2 этим

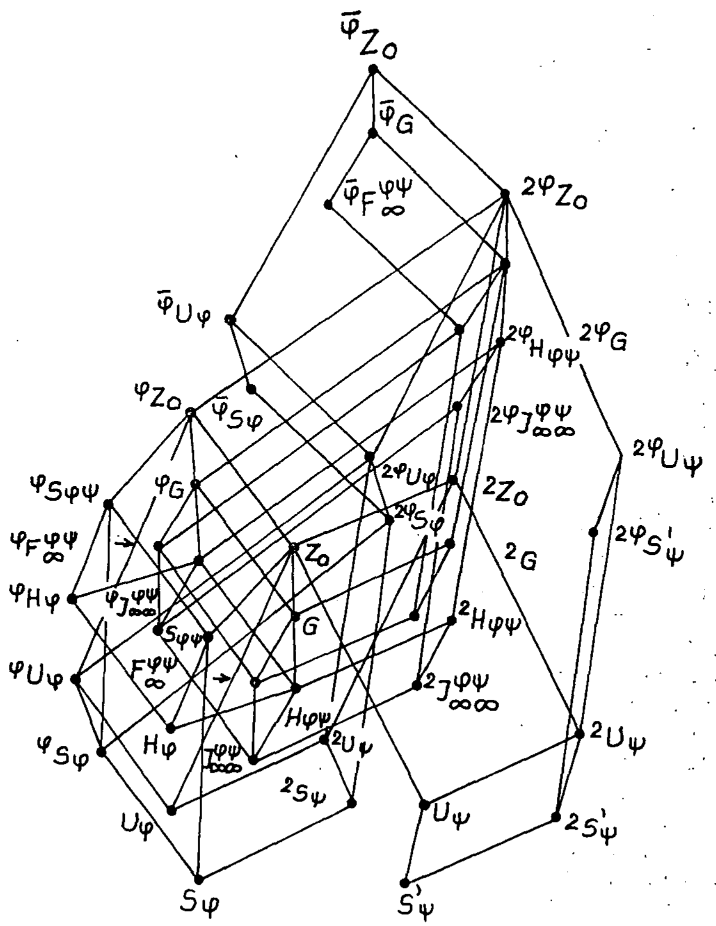


Рис. 11

всойством не обладают, и потому число новых клонов, получаемых с их участием, невелико.

В дальнейших рассуждениях без ссылок используется информация о подклонах клона Z_0, содержащаяся в таблицах 2 и 5. Для удобства читателя приводим также таблицу 6, содержащую результаты суперпозиций одноместных функций.

Таблица 6

ϱ	γ_0	δ_0	φ_0	$\bar\varphi_0$	ψ_0	$\bar\psi_0$	c_0	c_1
$\varrho*\gamma_2$	φ_0	$\bar\varphi_0$	c_0	c_1	φ_0	$\bar\varphi_0$	c_0	c_1
$\gamma_2*\varrho$	φ_2	$\bar\varphi_2$	γ_2	δ_2	ψ_2	$\bar\psi_2$	c_0	c_2
$\varrho*\psi_2$	ψ_0	$\bar\psi_0$	c_0	c_1	ψ_0	$\bar\psi_0$	c_0	c_2
$\psi_2*\varrho$	φ_2	$\bar\varphi_2$	γ_2	δ_2	ψ_2	$\bar\psi_2$	c_0	c_2
$\varrho*\delta_2$	$\bar\varphi_0$	φ_0	c_0	c_1	$\bar\varphi_0$	φ_0	c_0	c_1
$\delta_2*\varrho$	$\bar\varphi_2$	φ_2	δ_2	γ_2	$\bar\psi_2$	ψ_2	c_2	c_0
$\varrho*\bar\psi_2$	$\bar\psi_0$	ψ_0	c_0	c_1	$\bar\psi_0$	ψ_0	c_0	c_1
$\bar\psi_2*\varrho$	$\bar\varphi_2$	φ_2	δ_2	γ_2	$\bar\psi_2$	ψ_2	c_2	c_0

Пусть K-клон, порождаемый функциями u_0^3 и γ_2. Очевидно, $K\supset L_\varphi$. Так как $\varphi_0*\gamma_2=c_0$, то K содержит все функции u_0^n, то есть $K\supset S_\varphi$. Очевидно, клон K содержит также функции $\gamma_2*u_0^n$; других функций в нем нет. Клон K обозначим через ${}^\gamma S_\varphi$.

Клон ${}^\gamma U_\varphi$ порождается функциями $1+u_0^2, \gamma_2$. Содержит функции u_0^{2k+1}, $1+u_0^{2k}$, а потому и $u_0^{2k}, 1+u_0^{2k+1}$, $\gamma_2*u_0^n$, $\gamma_2*(1+u_0^n)$. Очевидно, $L'_\varphi\sqcup\gamma_2={}^\gamma U_\varphi$.

Клон ${}^\gamma S_{\varphi\psi}$ порождается функциями p_0^3, γ_2 и потому ${}^\gamma S_{\varphi\psi}\supset L_\psi$. Так как $\psi_0*\gamma_2=\varphi_0$, то ${}^\gamma S_{\varphi\psi}\supset L_\varphi$, отсюда ${}^\gamma S_{\varphi\psi}\supset S_\varphi$ и потому ${}^\gamma S_{\varphi\psi}\supset S_{\varphi\psi}$. Этот клон содержит функции $g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0$, $\gamma_2(g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$. Другие базисы этого клона — $\gamma_0+\gamma_0, \gamma_2$; $\varphi_0+\gamma_0, \gamma_2$; $\psi_0+\psi_0, \gamma_2$; $\varphi_0+\varphi_0, \gamma_2$.

Так как клоны L'_ψ, S'_ψ, $L^1_{\varphi\psi}$, U_ψ, $S'_{\varphi\psi}$ содержат L_ψ и не содержатся в $S_{\varphi\psi}$, то при добавлении γ_2 к базису любого из этих клонов получается $Z_0\sqcup\gamma_2=Z_0\cup Z_2$.

Клон, содержащий функции $1+\varphi_0+\gamma_0, \gamma_2$, содержит $L_{\varphi+\delta}$, то есть функции $c+\varphi_0+f_0^n$, $c+\psi_0+f_0^n$, а вместе с ними и все функции $c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0, \gamma_2$ $(c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$, и потому совпадает с $Z_0\cup Z_2$. Тот же результат получим, беря функции $1+\gamma_0+\gamma_0, \gamma_2$. Таким образом, семейство функций клона Z_0, содержащее существенно многоместную функцию, вместе с γ_2 может породить лишь один из четырех указанных выше клонов.

Клон ${}^\psi S_\varphi$ порождается функциями u_0^3, ψ_2. Так как $\psi_2*\varphi_0=\gamma_2$, то он содержит ${}^\gamma S_\varphi$, то есть функции u_0^n, $\gamma_2*u_0^n$ и ψ_2.

Клон ${}^\psi U_\varphi$ порождается функциями $1+u_0^2$, ψ_2. Содержит φ_0, а вместе с ней γ_2 и все функции из ${}^\gamma U_\varphi$, то есть u_0^n, $1+u_0^n$, $\gamma_2+u_0^n$, $\gamma_2*(1+u_0^n)$, ψ_2. Очевидно, этот же клон порождается функциями $1+u_0^3, \psi_2$.

Клон, порождаемый функциями $\gamma_0+\gamma_0$ и ψ_2 содержит $\psi_0+\gamma_0=(\gamma_0+\gamma_0)*\psi_2$, следовательно φ_0 и γ_2, и потому совпадает с ${}^\gamma S_{\varphi\psi}$. Тот же результат получим, взяв функции $\varphi_0+\gamma_0, \psi_2$ или u_0^3, p_0^3, ψ_2, так как $(\varphi_0+\gamma_0+\gamma_0)*\psi_2=\gamma_0+\gamma_0, \psi_2*u_0^3=\gamma_2$.

${}^\psi L_\psi=L_\psi\sqcup\psi_2$. Состоит из функций $p_0^{2k+1}, \psi_2*p_0^{2k+1}$ $(k\geqq 0)$.

${}^\psi S_\psi=S_\psi\sqcup\psi_2$. Содержит функции $p_0^n, \psi_2*p_0^n$, $n\geqq 0$.

${}^\psi S'_\psi=S'_\psi\sqcup\psi_2$. Содержит функции p_0^{2k+1}, $\psi_2*p_0^{2k+1}$, $1+p_0^{2k}$, $\psi_2*(1+p_0^{2k})$ $(k\geqq 0)$.

${}^{\psi}L'_{\psi}=L'_{\psi}\sqcup\psi_2$, состоит из функций p_0^{2k+1}, $1+p_0^{2k+1}$, $\psi_2*p_0^{2k+1}$, $\psi_2*(1+p_0^{2k+1})$ $(k\geqq 0)$.

${}^{\psi}U_{\psi}=U_{\psi}\sqcup\psi_2$, состоит из p_0^n, $1+p_0^n$, $\psi_2*p_0^n$, $\psi_2*(1+p_0^n)$ $(n\geqq 0)$.

Так как $L_{\varphi+\gamma}\sqcup\psi_2=L_{\varphi\psi}\sqcup\psi_2={}^{\psi}S_{\varphi\psi}$, а $S_{\varphi\psi}$-максимальный подклон клона Z_0, то все оставшиеся клоны, имеющие вид $K\sqcup\psi_2$, $K\nsubseteqq S_{\varphi\psi}$, совпадают с $Z_0\cup Z_2$.

Из рассмотренных клонов вида ${}^{\psi}K$ не содержат γ_2 клоны ${}^{\psi}L_{\psi}$, ${}^{\psi}S_{\psi}$, ${}^{\psi}S'_{\psi}$, ${}^{\psi}L'_{\psi}$, ${}^{\psi}U_{\psi}$. Добавляя γ_2 к порождающим каждого из них, плучим ${}^{\gamma}S_{\varphi\psi}$ в первых двух случаях, и $Z_0\cup Z_2$-в остальных.

Очевидно, описывая клоны вида $K\sqcup\delta_2$, $K\subset Z_0$, содержащие существенно многоместные функции, достаточно рассмотреть клоны вида $K_1\sqcup\delta_2$, где $K_1\in\{{}^{\gamma}S_{\varphi}, {}^{\gamma}U_{\varphi}, {}^{\gamma}S_{\varphi\psi}\}$. Клон ${}^{\gamma}U_{\varphi}$ уже содержит δ_2, поэтому ${}^{\gamma}U_{\varphi}\sqcup\delta_2={}^{\gamma}U_{\varphi}$. Новым является клон ${}^{\delta}S_{\varphi}$, содержащий функции $u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \delta_2*u_0^n$. Клон ${}^{\delta}S_{\varphi\psi}$ содержит функции $\varrho(g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$, $\varrho\in\{\varphi_0, \gamma_2, \varrho_2\}$, и потому совпадает с $Z_0\cup Z_2$.

Займемся клонами вида $K\sqcup\bar{\psi}_2$, $K\in\{{}^{\psi}S_{\varphi}, {}^{\psi}U_{\varphi}, {}^{\psi}L_{\psi}, {}^{\psi}S_{\psi}, {}^{\psi}S'_{\psi}, {}^{\gamma}S_{\varphi\psi}, {}^{\psi}L_{\psi}, {}^{\psi}U'_{\psi}\}$. Клон ${}^{\bar{\psi}}S_{\varphi}$ порождается базисом u_0^2, $\bar{\psi}_2$. Содержит функции u_0^n, $\gamma_2*u_0^n$, $\delta_2*u_0^n$, ψ_2, $\bar{\psi}_2$.

${}^{\bar{\psi}}U_{\varphi}=U_{\varphi}\sqcup\bar{\psi}_2$. Содержит функции u_0^n, $1+u_0^n$, $\gamma_2*u_0^n$, $\gamma_2*(1+u_0^n)$, ψ_2, $\bar{\psi}_2$.

${}^{\bar{\psi}}L_{\psi}=L_{\psi}\sqcup\bar{\psi}_2$. Состоит из функций p_0^{2k+1}, $\psi_2*p_0^{2k+1}$, $\bar{\psi}_2*p_0^{2k+1}$.

${}^{\bar{\psi}}S_{\psi}=S_{\psi}\sqcup\psi_2$. Состоит из функций p_0^n, $\psi_2*p_0^n$, $\bar{\psi}_2*p_0^n$.

${}^{\bar{\psi}}S'_{\psi}=S_{\psi}\sqcup\psi_2$. Состоит из функций p_0^{2k+1}, $1+p_0^{2k}$, $\psi_2*p_0^{2k+1}$, $\psi_2*(1+p_0^{2k})$, $\psi_2*p_0^{2k+1}$, $\psi_2*(1+p_0^{2k})$.

Из $\psi_2*\bar{\psi}_0=\bar{\psi}_2$ заключаем, что ${}^{\psi}L'_{\psi}\sqcup\bar{\psi}_2={}^{\psi}L'_{\psi}$, ${}^{\psi}U'_{\psi}\sqcup\bar{\psi}_2={}^{\psi}U'_{\psi}$. Клон ${}^{\gamma}S_{\varphi\psi}\sqcup\bar{\psi}_2$ содержит $\delta_2=\bar{\psi}_2*\gamma_2$ и потому совпадает с $Z_0\cup Z_2$.

Клоны ${}^{\bar{\psi}}L_{\psi}$, ${}^{\bar{\psi}}S_{\psi}$, ${}^{\bar{\psi}}S'_{\psi}$ не содержат δ_2. Добавление к любому из них этой функции дает $Z_0\cup Z_2$.

Все вновь полученные клоны указаны в таблице 7.

Таблица 7

Клон	Базис	Содержит функции
${}^{\gamma}S_{\varphi}$	u_0^2, γ_2	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n$
${}^{\gamma}U_{\varphi}$	$1+u_0^2, \gamma_2$	$u_0^n, 1+u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n)$
${}^{\gamma}S_{\varphi\psi}$	p_0^2, γ_2	$g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0, \gamma_2*(g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$
${}^{\psi}S_{\varphi}$	u_0^2, ψ_2	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \psi_2$
${}^{\psi}U_{\varphi}$	$1+u_0, \psi_2$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \psi_2(c\in\{0, 1\})$
${}^{\psi}L_{\psi}$	p_0^3, ψ_2	$p_0^{2k+1}, \psi_2*p_0^{2k+1}$
${}^{\psi}S_{\psi}$	p_0^2, ψ_2	$p_0^n, \psi_2*p_0^n$
${}^{\psi}L'_{\psi}$	$1+p_0^3, \psi_2$	$c+p_0^{2k+1}, \psi_2*(c+p_0^{2k+1}), c\in\{0, 1\}$
${}^{\psi}S'_{\psi}$	$1+p_0^2, \psi_2$	$1+p_0^{2k}, \psi_2*(1+p_0^{2k}), p_0^{2k+1}, \psi_2*p_0^{2k+1}$
${}^{\psi}U_{\psi}$	$p_0^2, 1+p_0^2, \psi_2$	$c+p_0^n, \psi_2*(c+p_0^n), c\in\{0, 1\}$
${}^{\delta}S_{\psi}$	$u_0^2, \gamma_2, \delta_2,$	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \delta_2*u_0^n$
${}^{\psi\delta}S_{\psi}$	$u_0^2, \gamma_2, \delta_2, \psi_2$	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \delta_2*u_0^n, \psi_2$
${}^{\bar{\psi}}S_{\varphi}$	$u_0^2, \bar{\psi}_2$	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \delta_2*u_0^n, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\bar{\psi}}U_{\varphi}$	$1+u_0^2, \bar{\psi}_2$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \psi_2, \bar{\psi}_2, c\in\{0, 1\}$
${}^{\bar{\psi}}L_{\psi}$	$p_0^3, \bar{\psi}_2$	$p_0^{2k+1}, \psi_2*p_0^{2k+1}, \psi_2*p_0^{2k+1}$
${}^{\bar{\psi}}S_{\psi}$	$p_0^2, \bar{\psi}_2$	$p_0^n, \psi_2*p_0^n, \bar{\psi}_2*p_0^n$
${}^{\bar{\psi}}S'_{\psi}$	$1+p_0^2, \bar{\psi}_2$	$h*p_0^{2k+1}, h*(1+p_0^{2k}), h\in\{\psi_0, \psi_2, \bar{\psi}_2\}$

Клоны из таблицы 8 легко получаются из клонов, отмеченных на рисунке 11, с учетом состава клонов из таблицы 7.

В таблице 9 указаны все клоны, состоящие из существенно одноместных функций и содержащие функции из множества $\{\gamma_2, \delta_2, \psi_2, \overline{\psi}_2\}$.

Таблица 8

Клон	Базис	Содержащиеся функции
${}^{\gamma\varphi}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2, \varphi_2$	$u_0^n, \gamma_2 * u_0^n, \varphi_2$
${}^{\gamma\varphi}U_\varphi$	$1+u_0^2, \gamma_2$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \varphi_2, c\in\{0, 1\}$
${}^{\psi\varphi}S_\varphi$	u_0^2, φ_2, ψ_2	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}U_\varphi$	$1+u_0^2, \varphi_2, \psi_2$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \varphi_2, \psi_2$
${}^{\overline{\psi}\varphi}S_\varphi$	$u_0^2, \varphi_2, \overline{\psi}_2$	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \delta_2*u_0^n, \varphi_2, \bar{\varphi}_2, \psi_2, \overline{\psi}_2$
${}^{\overline{\psi}\varphi}U_\varphi$	$1+u_0^2, \varphi_2, \overline{\psi}_2$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \varphi_2, \bar{\varphi}_2, \psi_2, \overline{\psi}_2$
${}^{2\gamma}S_\varphi$	c_2, u_0^2, γ_2	$c_2, u_0^n, \gamma_2*u_0^n$
${}^{2\gamma}U_\varphi$	$c_2, 1+u_0^2, \gamma_2$	$c_2, c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), c\in\{0, 1\}$
${}^{2\psi}S_\varphi$	c_2, u_0^n, ψ_2	$c_2, u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \psi_2$
${}^{2\psi}U_\varphi$	$c_2, 1+u_0^2, \psi_2, c_2,$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \psi_2$ $c\in\{0, 1\}$
${}^{2\gamma\varphi}S_\varphi$	$c_2, u_0^2, \gamma_2, \varphi_2$	$c_2, u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \varphi_2$
${}^{2\psi\varphi}S_\varphi$	$c_2, u_0^2, \varphi_2, \psi_2$	$c_2, u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \varphi_2, \psi_2$

Таблица 9

Клон	Базис	Содержащиеся функции
${}^{\gamma}I_{00}^{0}$	γ_2	γ_2, c_0
${}^{\gamma}I_{00}^{0\varphi}$	φ_0, γ_2	φ_0, c_0, γ_2
${}^{2\gamma}I_{00}^{0}$	γ_2, c_2	c_0, c_2, γ_2
${}^{\gamma}I_{00}$	γ_2, c_1	c_0, c_1, c_2, γ_2
${}^{2\gamma}I_{00}^{0\varphi}$	φ_0, c_2, γ_2	$c_0, c_2, \varphi_0, \gamma_2$
${}^{\gamma}I_{00}^{0\varphi\psi}$	φ_0, γ_2	$c_0, \varphi_0, \psi_0, \gamma_2, \psi_2$
${}^{\gamma}I_{00}^{\varphi}$	c_1, φ_0, γ_2	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \gamma_2$
${}^{\gamma}I_{00}^{\varphi\psi}$	c_1, ψ_0, γ_2	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \psi_0, \gamma_2, \psi_2$
${}^{\gamma}I_{10}^{0\varphi}$	γ_0, γ_2	$c_0, \gamma_0, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma}I_{10}^{0\varphi\psi}$	$\gamma_0, \psi_0, \gamma_2$	$c_0, \gamma_0, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\gamma}F_{1}^{\varphi}$	δ_0, γ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \delta_0, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \varphi_2, \bar{\varphi}_2, \gamma_2, \delta_2$
${}^{\gamma}F_{1}^{\varphi\psi}$	$\delta_0, \psi_0, \gamma_2$	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \delta_0, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \psi_0, \overline{\psi}_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2, \psi_2, \overline{\psi}_2$
${}^{\gamma}I_{10}$	c_1, γ_0, γ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma}I_{10}^{\varphi}$	$c_1, \gamma_0, \varphi_0, \gamma_2$	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma}I_{10}^{\varphi\psi}$	$c_1, \gamma_0, \psi_0, \gamma_2$	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0, \gamma_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\gamma}F_{0}^{\varphi}$	$\bar{\varphi}_0, \gamma_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \gamma_2, \delta_2$
${}^{\gamma}F_{0}^{\varphi\psi}$	$\overline{\psi}_0, \gamma_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \psi_0, \bar{\varphi}_0, \overline{\psi}_0, \gamma_2, \delta_2, \psi_2, \overline{\psi}_2$
${}^{2\gamma}I_{00}^{0\varphi\psi}$	ψ_0, c_2, γ_2	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \psi_0, \gamma_2, \psi_2$
${}^{\gamma 2\varphi}I_{00}^{0}$	c_2, γ_2, φ_2	$c_0, c_2, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma 2\varphi}I_{00}^{0\varphi}$	$c_2, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$	$c_0, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma}I_{10}^{0\varphi\psi}$	$\gamma_0, \psi_0, c_2, \gamma_2$	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0, \gamma_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\delta}E_{\varphi}$	φ_0, δ_2	φ_0, δ_2
${}^{\delta}I_{00}^{0}$	c_0, δ_2	c_0, c_2, δ_2
${}^{\delta}I_{00}^{0\varphi}$	c_0, φ_0, δ_2	$c_0, c_2, \varphi_0, \delta_2$

Таблица 9 (продолжение)

Клон	Базик	Содержащиеся функции
${}^{\delta}I_{00}^{\varphi\psi}$	c_0, ψ_0, δ_2	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \psi_0, \bar{\psi}_0, \gamma_2, \delta_2, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\delta}I_{00}^{1}$	c_1, δ_2	c_0, c_1, c_2, δ_2
${}^{\delta}I_{00}^{1\varphi}$	c_1, φ_0, δ_2	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \delta_2$
${}^{\delta}I_{01}^{\varphi}$	δ_0, δ_2	$c_0, c_1, c_2, \delta_0, \varphi_0, \delta_2, \varphi_2$
${}^{\gamma\varphi}I_{00}^{0}$	γ_2, φ_2	c_0, γ_2, φ_2
${}^{\gamma\varphi}I_{00}^{0\varphi}$	$\varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$	$c_0, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma\varphi}I_{00}$	c_1, γ_2, φ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma\varphi}I_{00}^{\varphi}$	$c_1, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2$
${}^{\gamma\varphi}F_{0}^{\varphi}$	$\bar{\varphi}_0, \gamma, \varphi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2$
${}^{\gamma\bar{\varphi}}I_{00}^{0}$	γ_2, φ_2	$c_0, c_2, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2$
${}^{\gamma\bar{\varphi}}I_{00}^{0\varphi}$	$\varphi_0, \gamma_2, \bar{\varphi}_2$	$c_0, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2$
${}^{\gamma\bar{\varphi}}I_{00}$	$c_1, \gamma_2, \bar{\varphi}_2$	$c_0, c_1, c_2, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2$
${}^{\gamma\bar{\varphi}}I_{00}^{\varphi}$	$c_1, \varphi_0, \gamma_2, \bar{\varphi}_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2$
${}^{\gamma\bar{\varphi}}F_{0}^{\varphi}$	$\bar{\varphi}_0, \gamma_2, \bar{\varphi}_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar{\varphi}_2$
${}^{\psi}E_{\psi}$	ψ_0, ψ_2	ψ_0, ψ_2
${}^{\psi}E_{\varphi\psi}$	φ_0, ψ_2	$c_0, \varphi_0, \gamma_2, \psi_2$
${}^{\psi}I_{00}^{0}$	c_0, ψ_2	c_0, ψ_2
${}^{\psi}I_{00}^{0\psi}$	c_0, ψ_0, ψ_2	c_0, ψ_0, ψ_2
${}^{\psi\varphi}I_{10}^{0\psi}$	γ_0, ψ_2	$c_0, \gamma_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi}I_{00}^{1}$	c_1, ψ_2	c_1, c_2, ψ_2
${}^{\psi}I_{00}^{1\psi}$	c_1, φ_0, ψ_2	c_1, c_2, ψ_0, ψ_2
${}^{\psi}I_{00}$	c_0, c_1, ψ_2	c_0, c_1, c_2, ψ_2
${}^{\psi}I_{00}^{\psi}$	c_0, c_1, ψ_0, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \psi_0, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{10}^{\psi}$	c_1, γ_0, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{10}^{\psi}$	c_1, γ_0, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi}F_{00}^{\psi}$	$\bar{\psi}_0, \psi_2$	$\psi_0, \bar{\psi}_0, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\psi}F_{0}^{\varphi}$	$\bar{\varphi}_0, \psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \gamma_2, \delta_2, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\psi}F_{0}^{\psi}$	$c_0, \bar{\psi}_0, \psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \psi_0, \bar{\psi}_0, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\psi\varphi}I_{00}^{0}$	c_0, φ_2, ψ_2	c_0, φ_2, ψ_2
${}^{\psi\varphi}I_{00}^{0\varphi}$	$c_0, \varphi_0, \varphi_2, \psi_2$	$c_0, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{10}^{0\psi}$	$\gamma_0, \varphi_2, \psi_2$	$c_0, \gamma_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{00}$	c_1, φ_2, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{00}^{\varphi}$	$c_1, \varphi_0, \varphi_2, \psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{00}^{\psi}$	$c_1, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}I_{00}^{\varphi\psi}$	$c_1, \varphi_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \psi_0, \gamma_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi\varphi}F_{1}^{\psi}$	δ_0, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \delta_0, \psi_0, \bar{\psi}_0, \varphi_2, \bar{\varphi}_2, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\psi\varphi}F_{0}^{\varphi}$	$c_0, \bar{\varphi}_0, \varphi_2, \psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar{\varphi}_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\psi 2}I_{00}^{0}$	c_0, c_2, ψ_2	c_0, c_2, ψ_2
${}^{\psi 2}I_{00}^{1}$	c_1, c_2, ψ_2	c_1, c_2, ψ_2
${}^{\psi 2}I_{00}^{0\varphi}$	$c_0, c_2, \varphi_0, \psi_2$	$c_0, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \psi_2$
${}^{\psi 2}I_{00}^{\psi}$	c_1, ψ_0, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \psi_0, \psi_2$
${}^{\psi 2}I_{00}^{\varphi}$	$c_0, c_1, \varphi_0, \varphi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \psi_2$
${}^{\psi 2}I_{10}^{\psi}$	c_2, γ_0, ψ_2	$c_0, c_1, c_2, \gamma_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$
${}^{\bar{\psi}}I_{00}^{0}$	$c_0, \bar{\psi}_2$	$c_0, c_2, \psi_2, \bar{\psi}_2$
${}^{\bar{\psi}}I_{00}^{0\varphi}$	$\varphi_0, \bar{\psi}_2$	$c_0, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \delta_2, \psi_2, \bar{\psi}_2$

Таблица 9 (продолжение)

Клон	Базик	Содержащиеся функции
${}^{\bar\psi}I_{00}$	$c_1, \bar\psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\psi}F_0^{\psi}$	$c_0, \psi_0, \bar\psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \psi_0, \bar\psi_0, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\psi}F_0^{\varphi\psi}$	$c_0, \varphi_0, \psi_0, \bar\psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar\varphi_0, \psi_0, \bar\psi_0, \gamma_2, \delta_2, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\psi\bar\varphi}I_{00}^{0}$	$c_0, \bar\varphi_2, \bar\psi_2$	$c_0, c_2, \varphi_2, \bar\varphi_2, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\psi\bar\varphi}I_{00}^{0\varphi}$	$\varphi_0, \bar\varphi_2, \bar\psi_2$	$c_0, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar\varphi_2, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\psi\bar\varphi}I_{00}$	$c_1, \bar\varphi_2, \bar\psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_2, \bar\varphi_2, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\psi\bar\varphi}I_{00}^{\varphi}$	$c_1, \varphi_0, \bar\varphi_2, \bar\psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar\varphi_2, \psi_2, \bar\psi_2$
${}^{\bar\varphi}F_0^{\varphi}$	$\bar\varphi_0, \bar\varphi_2, \bar\psi_2$	$c_0, c_1, c_2, \varphi_0, \bar\varphi_0, \gamma_2, \delta_2, \varphi_2, \bar\varphi_2, \psi_2, \bar\psi_2$

5. Подклоны клона $Z_0 \cup Z_2$, порождаемые с помощью многоместных функций из Z_2

Теперь мы рассмотрим возможность порождения новых клонов путем добавления к функциям из подклонов клона Z_0 существенно многоместных функций из Z_2. Начать естественно с более простого случая — с тех подклонов клона Z_0, которые содержат только существенно одноместные функции. Легко однако заметить, что мы будем получать лишь подклоны, изоморфные уже описанным. Действительно, пусть клон K порождается унарными функциями $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ из Z_0 и функцией $\varrho \in Z_2$. Рассмотрим функции, λ_0-двойственные указанным. Функции $\varrho_1^{\lambda_0}, \ldots, \varrho_s^{\lambda_0}$ принадлежат Z_2, ϱ принадлежит Z_0, и совместно они порождают клон, λ_0-двойственный клону K. Все клоны такого типа уже найдены выше.

Видим, что нам осталось описать все клоны K, порождаемые объединением базисов клонов $K_1 \leqq Z_0$ и $K_2 \leqq Z_2$, при условии, что эти клоны содержат существенно многоместные функции. Комбинации базисов, очевидным образом не порождающие новые клоны, рассматриваться не будут.

Пусть K_2 порождается либо функцией $u_2^3 = \varphi_2 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_2 = \gamma_2 * (\gamma_0 + \gamma_0 + \gamma_0)$, либо функцией $\bar u_2^3 = \gamma_2 * (1 + \gamma_0 + \gamma_0 + \gamma_0)$. Так как $\gamma_2 * \varrho_0 = c_0$, $\gamma_0 * \gamma_2 = \varphi_0$, для $\varrho_0 \in Z_0$, то $K \cap Z_2 = \{u_2^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ в первом случае и $K \cap Z_2 = \{u_2^n, \bar u_2^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ во втором. В таблице 10 приведены возможные варианты базиса клона K. Все построения при этом основываются на результатах суперпозиции $\varrho * \gamma_2$, $\varrho \in K_1$. Ввиду тривиальности мы их опустим. Вместо функций u_2^3, $\bar u_2^3$ в базисы включены функции $u_2^2, \bar u_2^2$, поскольку на результат такая замена не влияет.

Все клоны K, содержащие функцию $\bar u_2^2$, содержат и функцию u_2^2, поэтому случай, когда K_2 порождается функциями u_2^2, $\bar u_2^2$ совместно, не представляет интереса.

Пусть теперь K_2 порождается функцией $\varphi_2 \dotplus \gamma_2 = \gamma_2 * (\gamma_0 + \varphi_0)$. Из таблицы 4 видно, что K_2 состоит из функций $\varphi_2 \dotplus f_2^n = \gamma_2 * (\gamma_0 + u_0^n)$, $\psi_2 \dotplus f_2^n = \gamma_2 * (\psi_0 + u_0^n)$. Поскольку $\varphi_0 * \varrho = \varrho$ при $\varrho \in Z_0$, то если K содержит функцию γ_0 или ψ_0, то K содержит все функции $\gamma_2 * (g\gamma_0 + f\varphi_0 + p\psi_0)$. Если к тому же в K есть функция вида $1 + g_1\gamma_0 + f_1\varphi_0 + p_1\psi_0$, то $K > Z_2$. Если $\gamma_0 \in K$ или $\psi_0 \in K$, то из $\gamma_2 * \varrho \in K$ следует $\varrho \in K$. Учитывая сказанное и пользуясь данными таблиц 2, 6, 7, при-

Таблица 10

Клон	Базис	Вариант базиса	Содержащиеся функции
${}^{u}I^{0}_{\infty 0}$	f_0^2, u_2^2		$f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{0\varphi}_{\infty 0}$	φ_0, f_0^2, u_2^2		$\varphi_0, f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{0\psi}_{\infty 0}$	ψ_0, f_0^2, u_2^2		$\psi_0, f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{0\varphi\psi}_{\infty 0}$	$\varphi_0, \psi_0, f_0^2, u_2^2$		$\varphi_0, \psi_0, f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{1}_{0\infty}$	$1+f_0^2, u_2^2$		$1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{1\varphi}_{0\infty}$	$\varphi_0, 1+f_0^2, u_2^2$		$\varphi_0, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{1\psi}_{0\infty}$	$\psi_0, 1+f_0^2, u_2^2$		$\psi_0, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{1\varphi\psi}_{0\infty}$	$\varphi_0, \psi_0, 1+f_0^2, u_2^2$		$\varphi_0, \psi_0, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I_{\infty\infty}$	$f_0^2, 1+f_0^2, u_2^2$		$f_0^n, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{\varphi}_{\infty\infty}$	$\varphi_0, f_0^2, 1+f_0^2, u_2^2$		$\varphi_0, f_0^n, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{\psi}_{\infty\infty}$	$\psi_0, f_0^2, 1+f_0^2, u_2^2$		$\psi_0, f_0^n, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}I^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$	$\varphi_0, \psi_0, f_0^2, 1+f_0^2, u_2^2$		$\varphi_0, \psi_0, 1+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}S_{\varphi}$	u_3^3, u_2^2	u_0^2, u_2^2	$u_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}U_{\varphi}$	$1+u_0^3, u_2^2$	$1+u_0^2, u_2^2$	$u_0^n, 1+u_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}H_{\varphi}$	$\varphi_0+\gamma_0, u_2^2$	$\psi_0+\gamma_0, u_2^2$	$f_0^n, \varphi_0+f_0^n, \psi_0+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}S_{\varphi\psi}$	p_0^3, u_2^2		$g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}G$	$1+\varphi_0+\gamma_0, u_2^2$		$c+f_0^n, c+\varphi_0+f_0^n, c+\psi_0+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$ $(c \in \{0, 1\})$
${}^{u}Z_0$	$1+\varphi_0+\psi_0+\psi_0, u_2^2$	$1+p_0^2, u_2^2$	$c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}H_{\psi}$	$\psi_0+\gamma_0, u_2^2$		$1+f_0^n, \varphi_0+f_0^n, \psi_0+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{u}H_{\varphi\psi}$	$\varphi_0+\gamma_0, c_1$		$c+f_0^n, \varphi_0+f_0^n, \psi_0+f_0^n, \gamma_2 * f_0^n$
${}^{\bar u}I_{\infty\infty}$	$f_0^2, \bar u_2^2$		$c+f_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n) (c \in \{0, 1\})$
${}^{\bar u}I^{\varphi}_{\infty\infty}$	$\varphi_0, f_0^2, \bar u_2^2$		$\varphi_0, c+f_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}I^{\psi}_{\infty\infty}$	$\psi_0, f_0^2, \bar u_2^2$		$\psi_0, c+f_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}I^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$	$\varphi_0, \psi_0, f_0^2, \bar u_2^2$		$\varphi_0, \psi_0, c+f_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}S_{\varphi}$	$u_0^3, \bar u_2^2,$	$u_0^2, \bar u_2^2$	$u_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}U_{\varphi}$	$1+u_0^3, \bar u_2^2$		$c+u_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}H_{\varphi\psi}$	$\varphi_0+\gamma_0, \bar u_2^2$	$\varphi_0+\gamma_0, u_2^2$	$c+f_0^n, \varphi_0+f_0^n, \psi_0+f_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}Z_0$	$p_0^3, \bar u_2^2$		$c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0, \gamma_2 * (c+f_0^n)$
${}^{\bar u}G$	$1+\gamma_0+\varphi_0, \bar u_2^2$		$c+f_0^n, c+\varphi_0+f_0^n, c+\psi_0+f_0^n, \gamma_2 * (c+f_0^n)$.

ходим к выводу, что с помощью функции $\varphi_2 \dotplus \gamma_2$ порождается два новых клона: ${}^{\varphi+\gamma}S_{\varphi}$, ${}^{\varphi+\gamma}U_{\varphi}$ (таблица 11).

Если K_2 порождается функциями u_2^3 и p_2^3, то K_2 содержит функции

$$g\gamma_2 \dotplus f\varphi_2 \dotplus p\psi_2 = \gamma_2 * (g\varphi_0 + f\gamma_0 + p\psi_0), \quad f+p \doteq 2k+1.$$

Так как $K_1 \neq \emptyset$, то K содержит все функции $\gamma_2 * (g\varphi_0 + f\gamma_0 + p\psi_0)$. Получаем клоны ${}^{u,p}S_{\varphi}$, ${}^{u,p}U_{\varphi}$ (таблица 11). Очевидно, в случае, когда K_2 порождается функцией $\varphi_2 \dotplus \psi_2$ новых клонов не возникает.

Пусть K_2 порождается функцией $\gamma_2 \dotplus \gamma_2 = \gamma_2 * u_0^2$. В этом случае K_2 содержит только 3 существенно разные функции: c_0, $\gamma_2 + \varphi_0$, $\gamma_2 * u_0^2$. Если γ_0, δ_0, $\varphi_0+\gamma_0$ или $\varphi_0+\delta_0$ принадлежат K, то K содержит $\gamma_2 * (\varphi_0+\gamma_0)$, и мы опять возвращаемся к рассмотренному случаю. Аналогично, из

$$\{\varphi_0+\psi_0, p_0^3, \psi_0+\gamma_0, 1+\varphi_0+\psi_0, 1+p_0^3, 1+\psi_0+\gamma_0\} \cap K \neq \emptyset$$

следует принадлежность к K функций $\gamma_2*(g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$, $g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0$. Интерес могут представлять лишь клоны K, для которых $K\cap Z_2=\{\gamma_2*u_0^n\}$ или $K\cap Z_2=\{\gamma_2*(c+u_0^n)\}$, однако они уже указаны в таблице 7. Очевидно, те же клоны получим, взяв за основу функцию f_2^n. Если клон K_2 порождается функцией $\gamma_2\dotplus\delta_2=\gamma_2*(1+u_0^2)$, получаем клон ${}^{\gamma+\delta}S_\varphi$. Добавление к его базису функций $\varphi_2, \psi_2, \gamma_2\dotplus\gamma_2$ дает клоны

$$^{\varphi,\gamma+\delta}S_\varphi, \quad ^{\psi,\gamma+\delta}S_\varphi, \quad ^{\varphi,\psi,\gamma+\delta}S_\varphi, \quad ^{\varphi,\gamma+\gamma,\gamma+\delta}S_\varphi, \quad ^{\varphi,\psi,\gamma+\gamma,\gamma+\delta}S_\varphi$$

(таблица 11).

Пусть клон K_2 порождается функциями $\varphi_2\dotplus\gamma_2, c_0$, тогда в нем содержатся также функции

$$f_2^n=\gamma_2*u_0^n, \quad \varphi_2\dotplus f_2^n=\gamma_2*(\gamma_0+u_0^n), \quad \psi_2\dotplus f_2^n=\gamma_2*(\psi_0+u_0^n).$$

Видим, что K содержит все функции одного из клонов ${}^{\varphi+\gamma}S_\varphi$, ${}^{\varphi+\gamma}U_\varphi$, ${}^{\gamma}S_{\varphi\psi}$, и если $K\neq Z_0\cup Z_2$, то совпадает с ним, поскольку каждый из этих клонов содержит c_0.

Если базис клона K_2 образован функцией $\varphi_2\dotplus\delta_2=\gamma_2*(1+\varphi_0+\gamma_0)$, то K_2 состоит из функций $\gamma_2*(c+\gamma_0+u_0^n)$, $\gamma_2*(1+\varphi_0+\gamma_0)$. При $K_1\in\{S_\varphi, L_\varphi, L'_\varphi, S'_\varphi, U_\varphi\}$ новых клонов не получаем. Если K_1 содержит γ_0 или ψ_0, то $K>Z_2$, более того, K совпадает с $Z_0\cup Z_2$.

Если $\varphi_2\dotplus\gamma_2, c_0, c_2$ — базис клона K_2, то K_2 состоит из функций $\gamma_2*(c+u_0^n)$, $\gamma_2*(\gamma_0+u_0^n)$, $\gamma_2*(\psi_0+u_0^n)$. При $K_1=S_\varphi$ получаем еще один клон ${}^{2,\varphi+\gamma}S_\varphi$ (таблица 11), в остальных случаях новых клонов не возникает.

Опираясь на проведенные рассуждения, легко убедиться в том, что новых клонов не возникает и в том случае, когда K_2 порождается одним из базисов $\bar{\varphi}_2\dotplus\psi_2\dotplus\psi_2$; $\varphi_2\dotplus\gamma_2, \bar{\varphi}_2, c_0$.

Еще несколько вариантов базисов клона K_2 дает нам таблица 5. В первых пяти случаях клон K либо содержит все функции клона ${}^{\gamma}S_{\varphi\psi}$, либо совпадает с одним из клонов ${}^{\psi}L_\psi$, ${}^{\psi}S_\psi$, ${}^{\psi}L'_\psi$, ${}^{\psi}S'_\psi$, ${}^{\psi}U_\psi$. Базис $\psi_2\dotplus\gamma_2$ дает клон ${}^{2,\psi+\gamma}S_\varphi$ (таблица 11), базис $\bar{\varphi}_2\dotplus\psi_2$ новых клонов не дает.

Таблица 11

Клон	Базис	Содержащиеся функции
${}^{\varphi+\gamma}S_\varphi$	$u_0^2, \varphi_2\dotplus\gamma_2$	$u_0^n, \gamma_2*u_0^n, \gamma_2*(\gamma_0+u_0^n), \gamma_2*(\psi_0+u_0^n)$
${}^{\varphi+\gamma}U_\varphi$	$1+u_0^2, \varphi_2\dotplus\gamma_2$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \gamma_2*(c+\gamma_0+u_0^n)$, $\gamma_2*(c+\psi_0+u_0^n)$
${}^{u,p}S_\varphi$	u_0^2, u_3^2, p_2^3	$u_0^n, \gamma_2*(g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$
${}^{u,p}U_\varphi$	$1+u_0^2, u_2^3, p_2^3$	$c+u_0^n, \gamma_2*(c+g\gamma_0+f\varphi_0+p\psi_0)$
${}^{\gamma+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2\dotplus\delta_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n)$
${}^{\varphi,\gamma+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2\dotplus\delta_2, \varphi_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n), \varphi_2$
${}^{\psi,\gamma+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2\dotplus\delta_2, \psi_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n), \psi_2$
${}^{\varphi,\psi,\gamma+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2\dotplus\delta_2, \varphi_2, \psi_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n), \varphi_2, \psi_2$
${}^{\varphi,\gamma+\gamma,\gamma+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2\dotplus\gamma_2, \gamma_2\dotplus\delta_2, \varphi_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n), \varphi_2$
${}^{\varphi,\psi,\gamma+\gamma,\gamma+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \gamma_2\dotplus\gamma_2, \gamma_2\dotplus\delta_2, \varphi_2, \psi_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n), \varphi_2, \psi_2$
${}^{\varphi+\delta}S_\varphi$	$u_0^2, \varphi_2\dotplus\delta_2$	$u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \gamma_2*(c+\gamma_0+u_0^n)$, $\gamma_2*(c+\psi_0+u_0^n)$
${}^{2,\varphi+\gamma}S_\varphi$	$u_0^2, \varphi_2\dotplus\gamma_2, c_2$	$u_0^n, \gamma_2*(c+u_0^n), \gamma_2*(\gamma_0+u_0^n), \gamma_2*(\psi_0+u_0^n)$
${}^{2,\psi+\gamma}S_\varphi$	$u_0^2, \psi_2\dotplus\gamma_2, c_2$	$u_0^n, \gamma_2*(1+u_0^n), \gamma_2*(\gamma_0+u_0^n), \gamma_2*(\psi_0+u_0^n)$

Summary

The clone B consist of the essentially unary operations on $A=\{0, 1, 2\}$ and the operations of the form

$$f_0(f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n)),$$

where f_0: $\{0, 1\}\to A$, $f_1, \ldots, f_n$: $A\to\{0, 1\}$ and the addition is modulo 2. In the present paper we describe the lattice of subclones of the clone $Z_0\cup Z_2$ consisting of the projections and those members of clone B which take values 0 and 1 or 0 and 2 only.

Литература

[1] Bagyinszki J., Demetrovics J., The structure of linear classes in prime-valued logics (in Hungarian). — MTA SZTAKI Közl., 1976, N 16, p. 25—52.
[2] Bagyinszki J., Demetrovics J., The structure of linear classes in prime-valued logics. — Discrete Mathematics, Banach Center publications, Warsaw, 1982, p. 105—123.
[3] Berman J., McKenzie R., Clones satisfying the term condition. — Discrete Math., 1984, 52, p. 7—29.
[4] Бурле Г. А., Классы k-значных логик, содержащие все функции одной переменной. — Дискретный анализ, 1967, № 10, с. 3—7.
[5] Деметрович Я., Мальцев И. А., Подклоны клона Бурле на трехэлементном множестве. — Седьмая всесоюзная конференция по мат. логике, Новосибирск, 1984, с. 56.
[6] Деметрович Я., Мальцев И. А., О существенно минимальных ТС-клонах на трехэлементном множестве. — MTA SZTAKI Közl., 1984, № 32, с. 115—151.
[7] Деметрович Я., Мальцев И. А., ТУ-клоны на трехэлементном множестве. — ХУШ Всесоюзная алгебраическая конференция, тезисы сообщений, часть первая, Кишинев, 1985, с. 162.
[8] Lampe W. A., Abstract 77T—A120. — Notices Amer. Math. Soc. 1977, 24, A—371.
[9] А. И. Мальцев, Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск, 1976.
[10] Мальцев И. А., Некоторые свойства клеточных подалгебр алгебр Поста и их основных клеток. — Алгебра и логика, 1972, № 11, с. 571—587.
[11] Мальцев И. А., Некоторые свойства клеток алгебр Поста. — Дискретный анализ, 1973, № 23, с. 24—31.
[12] Taylor W., Some applications of the term condition. — Algebra Universalis, 1982, 14, p. 11—24.
[13] Яблонский С. В., Габрилов Г. И., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста. — М., Наука, 1966.
[14] Lau D., Klassen quasilinearen Functionen von P_3. — Rostocker Math. Koll., 1985, 28, 33—45.
[15] Марченков С. С., О замкнутых классах квазилинейных функций в P_3. — Препринт № 17 ИПМ АН СССР, 1986.

Received 9 February, 1988